

Théorème de Kurosh pour les relations d'équivalence boréliennes

Aurélien Alvarez

aurelien.alvarez@epfl.ch

En théorie des groupes, le théorème de Kurosh ([Kur56]) est un résultat de structure concernant les sous-groupes d'un produit libre de groupes ; plus précisément, un sous-groupe H du produit libre G d'une famille de groupes $(G_z)_{z \in Z}$ est isomorphe au produit libre de son intersection avec des conjugués des G_z convenablement indexés et d'un sous-groupe libre de G . Le théorème principal de cet article (th. 42) est un résultat analogue dans le cadre des relations d'équivalence boréliennes à classes dénombrables, que nous démontrons en développant une théorie de Bass-Serre dans ce cadre particulier. Nous renvoyons à [Alv08] pour une théorie de Bass-Serre dans le cadre plus naturel des groupoïdes boréliens.

Étant donné une relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} à classes dénombrables sur un espace borélien standard X , les acteurs principaux de ce travail sont les \mathcal{R} -arboretums (déf. 13), c'est-à-dire la donnée d'une action de \mathcal{R} sur un champ d'arbres borélien sur X . Nous nous intéressons dans un premier temps aux actions *quasi-libres*, ce qui nous permet d'obtenir une démonstration géométrique qu'une sous-relation d'une relation d'équivalence borélienne arborable est arborable (cor. 15, voir aussi [JKL02] dans le cadre borélien et [Gab00] en présence d'une mesure).

À toute décomposition de \mathcal{R} en produit libre de deux sous-relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 , est canoniquement associé un \mathcal{R} -arboretum *bi-coloré* et le théorème 25 donne une caractérisation *dynamique* des produits amalgamés de deux sous-relations suivant une sous-relation commune. Via la notion de *graphe de relations* (déf. 30), nous démontrons l'existence d'une *désingularisation* pour toute action de \mathcal{R} sur un arboretum (th. 34) et donnons des résultats sur la structure de \mathcal{R} (prop. 36, 16 et 40). Enfin, nous utilisons les résultats obtenus pour démontrer un analogue du théorème de Kurosh pour les sous-relations d'une relation d'équivalence borélienne $\mathcal{R} = \star_{i \in I} \mathcal{R}_i$ qui se décompose en produit libre dénombrable de sous-relations \mathcal{R}_i .

Théorème 1 (th. 42). *Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence borélienne sur X , produit libre dénombrable de sous-relations \mathcal{R}_i ($i \in I$). Alors*

$$\mathcal{S} = \star_{i \in I} (\star_{k_i \in K(i)} \mathcal{S}_{k_i}) \star \mathcal{T},$$

où, pour tout k_i d'un ensemble dénombrable $K(i)$, il existe un élément ϕ_{k_i} de $[[\mathcal{R}]]$ défini sur une partie borélienne A_{k_i} de X tel que

$$\mathcal{S}_{k_i} = \left(\phi_{k_i}^{-1} \mathcal{R}_i|_{\phi_{k_i}(A_{k_i})} \phi_{k_i} \right) \cap \mathcal{S},$$

et où \mathcal{T} est une sous-relation arborable de \mathcal{S} . De plus, pour tout i de I , il existe k_i dans $K(i)$ tels que

$$A_{k_i} = X \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{k_i} = \mathcal{R}_i \cap \mathcal{S}.$$

En particulier, nous donnons la décomposition de la restriction de \mathcal{R} à toute partie borélienne Y de X (th. 44) et précisons ainsi les résultats de Ioana-Peterson-Popa ([IPP05]) obtenus dans le cas de facteurs ergodiques.

En collaboration avec D. Gaboriau, nous introduisons dans [AG] la notion de relation d'équivalence mesurée *librement indécomposable* ainsi que la classe des groupes dénombrables *mesurablement librement indécomposables*. Les démonstrations des résultats de rigidité que nous obtenons (th. IV.18 et th. V.1) reposent en grande partie sur les théorèmes 42 et 44 de cet article.

Remerciements : Je tiens à remercier sincèrement Damien Gaboriau pour son encouragement tout au long de ce travail ainsi que Frédéric Paulin pour tout le soin qu'il a accordé à une première version de ce texte.

Dans la suite, le couple (X, \mathcal{B}_X) désigne toujours un espace borélien standard et \mathcal{R} une relation d'équivalence borélienne à classes dénombrables sur X .

I Actions quasi-libres et arboralité

Nous commençons par rappeler la définition des \mathcal{R} -espaces fibrés standards et mentionnons quelques propriétés de ces derniers qui nous seront utiles par la suite. Nous introduisons ensuite les \mathcal{R} -arboretums (déf. 13) et nous nous intéressons au cas particulier d'actions quasi-libres (déf. 11). Nous obtenons ainsi une caractérisation dynamique des relations d'équivalence boréliennes arborables (th. 14).

Rappelons qu'une partie borélienne A de X est un *domaine fondamental* de \mathcal{R} si elle rencontre chaque classe de \mathcal{R} en un unique élément et qu'une relation d'équivalence borélienne est lisse si elle admet un domaine fondamental. Le *saturé* $\mathcal{R} \cdot A$ d'une partie borélienne A de X est la partie borélienne de X constituée des éléments \mathcal{R} -équivalents à un élément de A . Lorsque le saturé de A coïncide avec X , on dit que A est un *domaine complet* de \mathcal{R} . Deux relations d'équivalence boréliennes \mathcal{R} et \mathcal{R}' sur X et X' respectivement sont *stablement orbitalement équivalentes* (ou *stablement isomorphes*) s'il existe des domaines complets A de \mathcal{R} et A' de \mathcal{R}' telles que les restrictions de \mathcal{R} et de \mathcal{R}' à ces domaines complets soient orbitalement équivalentes. Le *pseudo-groupe plein* de \mathcal{R} , noté $[[\mathcal{R}]]$, est l'ensemble de tous les isomorphismes partiels de X dont le graphe est contenu dans \mathcal{R} . Une application borélienne $f : A \rightarrow X$ est un *morphisme intérieur partiel* si tout élément de A est \mathcal{R} -équivalent à son image par f . Si $\phi : A \rightarrow B$ est un élément du pseudo-groupe plein de \mathcal{R} et \mathcal{S} une sous-relation de \mathcal{R} définie sur B , on définit alors sur A une sous-relation de \mathcal{R} notée $\phi^{-1}\mathcal{S}\phi$: deux éléments x et y sont $\phi^{-1}\mathcal{S}\phi$ -équivalents si par définition $\phi(x)$ et $\phi(y)$ sont \mathcal{S} -équivalents. Ainsi, \mathcal{S} et $\phi^{-1}\mathcal{S}\phi$ sont des sous-relations isomorphes via ϕ . On dit que $\phi^{-1}\mathcal{S}\phi$ est la sous-relation déduite de \mathcal{S} par *conjugaison* par ϕ . Deux sous-relations \mathcal{S} et \mathcal{S}' de \mathcal{R} définies sur les parties boréliennes A et A' de X sont *conjuguées* dans \mathcal{R} si elles sont orbitalement équivalentes via un élément $\phi : A \rightarrow A'$ du pseudo-groupe plein de \mathcal{R} , autrement dit si $\mathcal{S}' = \phi^{-1}\mathcal{S}\phi$. Enfin, nous dirons que \mathcal{S} et \mathcal{S}' sont *stablement conjuguées* dans \mathcal{R} s'il existe des domaines complets A et A' de \mathcal{S} et \mathcal{S}' respectivement sur lesquels les restrictions de \mathcal{S} et \mathcal{S}' sont conjuguées dans \mathcal{R} .

1 Espaces fibrés standards et actions

Un *espace fibré standard* (F, \mathcal{B}_F, π) est la donnée d'un espace borélien standard F sur X et d'une application borélienne (appelée projection) $\pi : F \rightarrow X$ surjective à pré-images dénombrables. La fibre F_x d'un élément x de X est la pré-image de x par π . Comme sous-ensemble borélien de $X \times X$, la relation \mathcal{R} définit naturellement deux espaces fibrés standards sur X via les projections π_l et π_r respectivement sur la première et deuxième coordonnée. Une *section borélienne* s de F est une application borélienne de X dans F telle que $\pi \circ s$ soit égale à l'identité. Si A est une partie borélienne de X et si s n'est définie que sur A , alors nous parlerons de *section partielle*. Un espace fibré standard sur X admet toujours une section borélienne. Ceci est une conséquence du théorème suivant (voir [Kur66], [Kec95]) :

Théorème 2 (Théorème de sélection). *Soit F un espace fibré standard sur X . Alors il existe une famille dénombrable de sections partielles de F dont les images forment une partition (borélienne et dénombrable) de F . De plus, on peut toujours supposer qu'au moins l'une de ces sections partielles est une section borélienne, c'est-à-dire définie sur X tout entier.*

Voici trois applications immédiates de ce théorème :

- si F un espace fibré standard sur X , alors il existe une numérotation borélienne des fibres de F , c'est-à-dire une application borélienne $N : F \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que la restriction de N à toute fibre de F soit injective. De plus, quitte à renuméroter les fibres de F , on peut toujours supposer que dans chaque fibre la numérotation commence à 1 et ne saute pas d'entiers naturels ;
- si f est une réduction de \mathcal{R} à \mathcal{R}' , c'est-à-dire une application borélienne $f : X \rightarrow X'$ telle que deux éléments de X sont \mathcal{R} -équivalents si et seulement si leurs images par f sont \mathcal{R}' -équivalents (cf. [JKL02]), alors il existe un domaine complet A de \mathcal{R} tel que la restriction de f à A soit une équivalence orbitale de $\mathcal{R}|_A$ à $\mathcal{R}'|_{f(A)}$;
- soit \mathcal{R} une relation d'équivalence borélienne sur X et A un domaine complet de \mathcal{R} . Alors il existe un morphisme intérieur de \mathcal{R} définie sur X et dont l'image est contenue dans A .

Nous allons maintenant introduire la notion d'*action* pour une relation d'équivalence borélienne sur un espace fibré standard F sur X . Rappelons d'abord que le *produit fibré* de deux espaces fibrés standards (F', π') et (F'', π'') sur X est l'espace fibré standard (F, π) où

$$F = F' \star F'' = \{(t', t'') \in F' \times F'' ; \pi'(t') = \pi''(t'')\}$$

et π l'application borélienne de F dans X définie par $\pi(t', t'') = \pi'(t')$.

Définition 3 (Gaboriau, [Gab02]). *Une \mathcal{R} -action (à gauche) sur l'espace fibré standard (F, π) sur X est une application borélienne*

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}, \pi_r) \star (F, \pi) &\longrightarrow F \\ ((x, y), t) &\longmapsto (x, y) \cdot t \end{aligned}$$

telle que, pour tout triplet (x, y, z) d'éléments \mathcal{R} -équivalents de X et pour tout t appartenant à F dans la fibre de z , on ait

$$(z, z) \cdot t = t \quad \text{et} \quad (x, y) \cdot ((y, z) \cdot t) = (x, z) \cdot t.$$

On dit alors que (F, π) est un \mathcal{R} -espace fibré standard sur X et que \mathcal{R} agit sur F .

Remarque : Pour qu'elle ait un sens la formule du produit ci-dessus impose que $(x, y) \cdot t$ soit un élément dans la fibre de x . De même on définit la notion d'action à droite que nous rencontrerons également par la suite.

Soit F un \mathcal{R} -espace fibré standard sur X . L'*orbite* d'un élément f_x de F dans la fibre de x de X est l'ensemble des $(y, x) \cdot f_x$ où y décrit la \mathcal{R} -classe de x . En particulier, l'action de \mathcal{R} sur F engendre une relation d'équivalence borélienne notée \mathcal{R}_F sur F : f_x et f_y sont \mathcal{R}_F -équivalents si, par définition, $(x, y) \cdot f_y = f_x$. Puisque deux éléments \mathcal{R}_F -équivalents de F se projettent dans X sur des éléments \mathcal{R} -équivalents, la projection est donc un morphisme de relations d'équivalence boréliennes.

Exemple fondamental : $(F, \pi) = (\mathcal{R}, \pi_l)$ définit un \mathcal{R} -espace fibré standard sur X avec l'action « horizontale »

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}, \pi_r) \star (\mathcal{R}, \pi_l) &\longrightarrow (\mathcal{R}, \pi_l) \\ ((x, y), (y, z)) &\longmapsto (x, z). \end{aligned}$$

Les classes de \mathcal{R}_F sont ici les fibres de $\pi_r : \mathcal{R} \longrightarrow X$. Nous dirons que (\mathcal{R}, π_l) est le *\mathcal{R} -espace fibré standard canonique gauche* associé à \mathcal{R} .

De la même façon, nous avons le \mathcal{R} -espace fibré standard canonique droit (\mathcal{R}, π_r) avec son action (à droite) « verticale »

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}, \pi_r) \star (\mathcal{R}, \pi_l) &\longrightarrow (\mathcal{R}, \pi_r) \\ ((x, y), (y, z)) &\longmapsto (x, z). \end{aligned}$$

Remarque : Si (F, π) est un \mathcal{R} -espace fibré standard sur X et A une partie borélienne de X , on obtient alors une notion de $\mathcal{R}|_A$ -espace fibré standard *induit* sur A : il s'agit de la restriction de (F, π) à $(\pi^{-1}(A), \pi|_{\pi^{-1}(A)})$.

Soit $s : A \longrightarrow F$ une section partielle d'un \mathcal{R} -espace fibré standard F , le stabilisateur $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s)$ de s est la sous-relation de \mathcal{R} définie sur A suivante : deux éléments x et y de A sont $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s)$ -équivalents si leurs images par s sont \mathcal{R}_F -équivalents, autrement dit

$$x \sim_{\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s)} y \quad \text{ssi} \quad (y, x) \cdot s(x) = s(y).$$

Notons que la projection sur X induit une équivalence orbitale entre la restriction de \mathcal{R}_F à $s(A)$ et $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s)$. Nous appellerons *saturé* de l'image de s le \mathcal{R}_F -saturé de $s(A)$. Si s est une section borélienne de F (c'est-à-dire si $A = X$), $s(X)$ est \mathcal{R}_F -saturé si et seulement si $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s)$ coïncide avec \mathcal{R} . Nous définissons maintenant la notion de morphisme entre \mathcal{R} -espaces fibrés standards sur X .

Définition 4. *Un morphisme $f : F \longrightarrow F'$ de \mathcal{R} -espaces fibrés standards est une application borélienne de F dans F' telle que, si x et y sont \mathcal{R} -équivalents et si f_x appartient à la fibre de x , alors*

$$f(F_x) \subset F'_x \quad \text{et} \quad f((y, x) \cdot f_x) = (y, x) \cdot f(f_x).$$

Remarque : En particulier, un morphisme de \mathcal{R} -espaces fibrés standards de F dans F' induit une application de la fibre F_x dans la fibre F'_x pour tout x de X . Un tel morphisme est dit injectif (respectivement surjectif) si c'est une application borélienne injective (resp. surjective) : au niveau des fibres, on obtient des applications de même nature. Remarquons également qu'un morphisme de \mathcal{R} -espaces fibrés standards de F dans F' induit un morphisme de relations d'équivalence boréliennes de \mathcal{R}_F dans $\mathcal{R}_{F'}$.

En particulier, un isomorphisme entre F et F' induit une équivalence orbitale entre \mathcal{R}_F et $\mathcal{R}_{F'}$.

Soit F un \mathcal{R} -espace fibré standard sur X . L'action de \mathcal{R} sur F est *transitive* et F est dit *homogène* s'il existe un domaine complet de \mathcal{R}_F sur lequel la restriction de la projection de F sur X est injective. Ainsi une action de \mathcal{R} sur F est transitive si et seulement s'il existe une section partielle s dite *saturante* définie sur une partie borélienne A de X dont l'image est un domaine complet de \mathcal{R}_F : autrement dit, le saturé de $s(A)$ coïncide avec F (A est nécessairement un domaine complet de \mathcal{R}).

Proposition 5. *Soit $s : A \longrightarrow F$ et $s' : A' \longrightarrow F$ deux sections partielles saturantes d'un \mathcal{R} -espace fibré standard homogène F . Alors leurs stabilisateurs $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s)$ et $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s')$ sont deux sous-relations de \mathcal{R} stablement conjuguées.*

Démonstration : Considérons le sous-ensemble borélien Ξ de \mathcal{R} constitué des couples d'éléments (a, a') de $A \times A'$ tels que $s(a)$ et $s'(a')$ appartiennent à la même orbite. Puisque le saturé de $s'(A)$ contient $s(A)$, la restriction de π_l à Ξ induit sur Ξ une structure d'espace fibré standard. Soit f' une section borélienne de $(\Xi, \pi_l) : \pi_r \circ f'$ est alors une réduction r de $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s)$ dans A dans $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s')$ sur A' qui de plus est un morphisme intérieur de \mathcal{R} vérifiant

$$s'(r(x)) = (r(x), x) \cdot s(x).$$

Puisque le saturé de $s(A)$ contient le saturé de $s'(A')$, on en déduit que $r(A)$ est un domaine complet de $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s')$ et ceci entraîne que r soit une équivalence orbitale stable entre $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s)$ et $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s')$. □

Remarque 1 : La proposition précédente assure, qu'étant donné un \mathcal{R} -espace fibré standard homogène sur X , le stabilisateur d'une section partielle saturante est unique à équivalence orbitale stable près.

Remarque 2 : On déduit de la proposition précédente le fait suivant que nous utiliserons à plusieurs reprises : si s'' est une section partielle (*a priori* non saturante) de F , alors le stabilisateur de $s'' : A'' \longrightarrow F$ est stablement conjugué à une restriction de $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s)$ où s est une section partielle saturante. En effet, le saturé de $s''(A'')$ est un sous-espace fibré standard F'' de la restriction de F à $\mathcal{R} \cdot A''$ qui est homogène de section partielle saturante s'' . Considérons la projection sur X de l'intersection de F'' et de $s(A)$: c'est une partie borélienne B de A telle que $\mathcal{R} \cdot B$ et $\mathcal{R} \cdot (A \setminus B)$ forment une partition de X et telle que la restriction de s à B soit alors une section partielle saturante de F'' . La proposition précédente assure alors que $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s'')$ et $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s|_B) = \text{Stab}_{\mathcal{R}}(s)|_B$ soient stablement conjugués.

Soit F_1 et F_2 deux \mathcal{R} -espaces fibrés standards sur X . Désignons par s_1 et s_2 des sections partielles de F_1 et F_2 définies sur la partie borélienne A de X . Supposons de plus que f soit un morphisme de \mathcal{R} -espaces fibrés standards de F_1 dans F_2 qui envoie $s_1(A)$ sur $s_2(A)$: le stabilisateur de s_1 est alors une sous-relation du stabilisateur de s_2 . Plus précisément, nous avons le lemme suivant :

Lemme 6. *Soit (F_1, π_1) et (F_2, π_2) deux \mathcal{R} -espaces fibrés standards sur X et deux sections partielles $s_i : A \longrightarrow F_i$ définies sur un domaine complet A de \mathcal{R} . Si s_1 est saturante, alors il existe un morphisme $f : F_1 \longrightarrow F_2$ de \mathcal{R} -espaces fibrés standards qui envoie $s_1(A)$ sur $s_2(A)$ si et seulement si le stabilisateur $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s_1)$ est une sous-relation de $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s_2)$. Si de plus s_2 est saturante, alors f est surjectif.*

Démonstration : Supposons que le stabilisateur $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s_1)$ soit une sous-relation de $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s_2)$. Si f_x appartient à la F_1 -fibre d'un élément x de X , alors par hypothèse il existe un élément y dans la classe de x tel que f_x appartienne à l'orbite de $s_1(y)$. On définit alors $f(f_x)$ comme l'image par le couple d'éléments (x, y) de $s_2(y)$. Cette définition ne dépend pas du choix du représentant y puisque deux éléments $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s_1)$ -équivalents sont $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s_2)$ -équivalents par hypothèse. Enfin, supposons que s_2 soit de plus saturante. On a alors

$$F_2 = \mathcal{R} \cdot s_2(A) = \mathcal{R} \cdot f(s_1(A)) = f(\mathcal{R} \cdot s_1(A)) = f(F_1).$$

□

On en déduit le fait important suivant :

Proposition 7. *Soit F un \mathcal{R} -espace fibré standard sur X . S'il existe une section borélienne s de F telle que $s(X)$ soit un domaine fondamental de \mathcal{R}_F , alors F est isomorphe au \mathcal{R} -espace fibré standard canonique.*

Démonstration : Le stabilisateur de s étant la relation triviale par hypothèse, le lemme précédent assure l'existence d'un morphisme surjectif f de \mathcal{R} -espaces fibrés standards entre F et le \mathcal{R} -espace fibré standard canonique (gauche) envoyant l'image de la section borélienne s sur la diagonale. Il ne reste plus qu'à voir que ce morphisme est injectif. Par l'absurde, supposons que f_x et f'_x soient deux éléments distincts dans la F -fibre d'un élément x de X tels que leurs images par f soient égales dans le \mathcal{R} -espace fibré standard canonique. Il existerait alors deux éléments y et z distincts de X tels que f_x et f'_x appartiennent respectivement aux orbites de $s(y)$ et $s(z)$. Mais par suite les images respectives par les couples d'éléments (y, x) et (z, x) des éléments $f(s(y))$ et $f(s(z))$ de la diagonale de \mathcal{R} seraient égales dans le \mathcal{R} -espace fibré standard canonique.

□

Nous allons maintenant voir que certains \mathcal{R} -espaces fibrés standards peuvent se plonger dans le \mathcal{R} -espace fibré standard canonique et nous utiliserons ce fait à plusieurs reprises.

Lemme 8. *Soit F un \mathcal{R} -espace fibré standard sur X admettant une section partielle s définie sur A telle que $s(A)$ soit un domaine fondamental de \mathcal{R}_F . Alors il existe un \mathcal{R} -espace fibré standard F' sur X contenant F et ayant une section borélienne s' qui prolonge s à X et telle que $s'(X)$ soit un domaine fondamental pour l'action de \mathcal{R} sur F' .*

Remarque : De l'existence d'une section borélienne de F' dont l'image est un domaine fondamental pour l'action de \mathcal{R} , on en déduit que le \mathcal{R} -espace fibré standard F' est isomorphe au \mathcal{R} -espace fibré standard canonique d'après la proposition précédente.

Démonstration : Puisque l'image de s est un domaine fondamental pour l'action de \mathcal{R} sur F , on en déduit que A est un domaine complet de \mathcal{R} . Considérons l'espace fibré standard réunion disjointe de $F|_A$ et de $\pi_l^{-1}(A) \cap \pi_r^{-1}(X \setminus A)$ qui est un espace fibré standard F' sur A via la restriction de π_l . Par construction, F' contient $F|_A$ et les actions de $\mathcal{R}|_A$ sur $F|_A$ et de $\mathcal{R}|_A$ sur la restriction à A de l'espace fibré standard canonique gauche se prolongent en une action de $\mathcal{R}|_A$ sur F' . Enfin, puisque A est un domaine complet de \mathcal{R} , F' s'étend par équivariance en un \mathcal{R} -espace fibré standard sur X comme souhaité en définissant la section borélienne s' de F' de telle sorte qu'elle coïncide avec s sur A et avec « l'identité » sur le complémentaire de A dans X .

Nous avons déjà mentionné que la donnée d'un \mathcal{R} -espace fibré standard F définit naturellement une relation d'équivalence borélienne \mathcal{R}_F sur l'espace borélien standard F . Le cas où \mathcal{R}_F est lisse va particulièrement nous intéresser dans notre étude des relations d'équivalence boréliennes arborables (cf. § 2).

Définition 9 (Action lisse). *Soit F un \mathcal{R} -espace fibré standard sur X . L'action de \mathcal{R} sur F est lisse (on dit aussi que \mathcal{R} agit de manière lisse sur F) si la relation d'équivalence borélienne \mathcal{R}_F sur F est lisse.*

Exemple : L'action de \mathcal{R} sur l'espace fibré standard canonique est lisse ; il en est de même de toute sous-relation de \mathcal{R} puisqu'une sous-relation d'une relation lisse est elle-même lisse. Plus généralement, si \mathcal{R} agit de manière lisse sur un espace fibré standard F , il en est de même de chacune de ses sous-relations.

Nous allons donner une caractérisation des actions lisses que nous utiliserons constamment et qui est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 10. *Pour tout \mathcal{R} -espace fibré standard F sur X , il existe une famille dénombrable $(s_i : A_i \longrightarrow F)_{i \in I}$ de sections partielles de F dont les saturés F_i des images $s_i(A_i)$ forment une partition \mathcal{R}_F -invariante de F .*

Remarque : Puisque par définition $\mathcal{R}_{F|_{F_i}}$ et $\mathcal{R}_{F|_{s_i(A_i)}}$ sont stablement orbitalement équivalentes, on en déduit qu'il en est de même de $\mathcal{R}_{F|_{F_i}}$ et $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s_i)$.

Démonstration : Donnons-nous une numérotation borélienne des fibres de F et considérons la section borélienne qui, à chaque élément de X , associe le plus petit élément dans sa fibre. Si le complémentaire du saturé de l'image de cette section borélienne est vide, c'est terminé. Sinon on considère la section partielle définie par les plus petits éléments restants dans chaque fibre puis le saturé de l'image de cette dernière. En continuant ainsi, on construit à chaque étape une nouvelle section partielle en prenant dans chaque fibre les éléments les plus petits restants dans le complémentaire des saturés des images des sections partielles précédemment construites. Cette construction fournit une exhaustion de F puisqu'un élément de numéro n dans une fibre de F a forcément été considéré avant la n^{e} étape.

□

Définition 11 (Action quasi-libre). *Soit F un \mathcal{R} -espace fibré standard sur X . L'action de \mathcal{R} sur F est quasi-libre (on dit encore que \mathcal{R} agit quasi-librement sur F) si le stabilisateur de toute section partielle de F est une sous-relation lisse de \mathcal{R} .*

On obtient alors la caractérisation suivante :

Proposition 12. *Étant donné un \mathcal{R} -espace fibré standard F sur X , l'action est quasi-libre si et seulement si \mathcal{R} agit de manière lisse sur F , c'est-à-dire si \mathcal{R}_F est lisse.*

Démonstration : L'implication réciproque est claire car nous avons déjà mentionné que le stabilisateur de toute section partielle $s : A \longrightarrow F$ est orbitalement équivalent à $\mathcal{R}_{F|_{s(A)}}$ qui est une sous-relation de \mathcal{R}_F . Supposons maintenant l'action quasi-libre et construisons un domaine fondamental de \mathcal{R}_F . Le lemme précédent assure l'existence d'une famille dénombrable $(s_i)_{i \in I}$ de sections partielles de F dont les saturés des images forment une partition \mathcal{R}_F -invariante de F . Le stabilisateur de chacune de ces sections partielles s_i étant lisse, considérons la restriction de s_i à un domaine

fondamental D_i de son stabilisateur : la réunion sur I des $s(D_i)$ est un domaine fondamental de \mathcal{R}_F . \square

Nous allons à présent introduire une classe de \mathcal{R} -espaces fibrés standards fondamentaux pour une relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} sur X . Si \mathcal{S} est une sous-relation de \mathcal{R} définie sur X , alors \mathcal{S} agit sur \mathcal{R} via l'action induite par celle de « \mathcal{R} sur \mathcal{R} ». En effet, considérons \mathcal{R} munie de ses deux structures de \mathcal{R} -espace fibré standard canoniques et remarquons que la projection $\pi_l : \mathcal{R} \rightarrow X$ est invariante sous l'action verticale de \mathcal{R} (et donc de \mathcal{S}) sur (\mathcal{R}, π_r) . De plus, puisque \mathcal{S} est une sous-relation de \mathcal{R} , elle agit également de manière lisse sur (\mathcal{R}, π_r) . Soit \mathcal{R}/\mathcal{S} l'espace quotient de \mathcal{R} par la relation d'équivalence borélienne engendrée par cette action. Comme les actions horizontale et verticale de « \mathcal{R} sur \mathcal{R} » commutent, on en déduit que c'est un \mathcal{R} -espace fibré standard sur X dont la projection sur X et l'action de \mathcal{R} sont induites par celles du \mathcal{R} -espace fibré standard canonique gauche (\mathcal{R}, π_l) : c'est le *\mathcal{R} -espace fibré standard canonique gauche associé au couple $(\mathcal{R}, \mathcal{S})$* . De plus, la diagonale d de ce dernier passe au quotient sous l'action de \mathcal{S} et le \mathcal{R} -espace fibré standard $(\mathcal{R}/\mathcal{S}, \pi_l)$ est naturellement muni d'une section borélienne $d_{\mathcal{S}}$ dont l'image est un domaine complet de $\mathcal{R}_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}$ et dont le stabilisateur est \mathcal{S} . Notons également que dans le cas où la sous-relation \mathcal{S} est triviale, $(\mathcal{R}/\mathcal{S}, \pi_l)$ n'est autre que le \mathcal{R} -espace fibré standard canonique gauche.

Remarque : La construction précédente s'étend au cas de sous-relations définies sur un domaine complet A de \mathcal{R} en considérant l'action de \mathcal{S} sur $(\mathcal{R} \cap \pi_r^{-1}(A), \pi_r)$. Dans ce cas, le \mathcal{R} -espace fibré standard \mathcal{R}/\mathcal{S} est naturellement muni d'une section partielle $d_{\mathcal{S}}$ définie sur A dont l'image est un domaine complet de $\mathcal{R}_{\mathcal{R}/\mathcal{S}}$ et dont le stabilisateur est \mathcal{S} . En particulier, \mathcal{R}/\mathcal{S} est un \mathcal{R} -espace fibré standard homogène et $d_{\mathcal{S}}$ une section partielle saturante.

Remarquons que l'on peut donner une description explicite de \mathcal{R}/\mathcal{S} en tant qu'espace fibré standard sur X . En effet, il suffit pour ceci de se donner une numérotation borélienne des fibres de l'espace fibré standard canonique gauche. Considérons la partie borélienne de (\mathcal{R}, π_l) constituée des paires (x, y) où y désigne l'élément de plus petit numéro dans sa \mathcal{S} -classe. L'espace fibré standard obtenu est alors isomorphe à l'espace fibré standard \mathcal{R}/\mathcal{S} .

De la même manière, on peut également considérer le \mathcal{R} -espace fibré standard canonique droit et faire agir \mathcal{S} à gauche. On obtient alors le \mathcal{R} -espace fibré standard $\mathcal{S} \backslash \mathcal{R}$. Soit S la symétrie par rapport à la diagonale :

$$S: \begin{cases} \mathcal{R} & \longrightarrow \mathcal{R} \\ (x, y) & \longmapsto (y, x). \end{cases}$$

Soit x, x' et y trois éléments \mathcal{R} -équivalents tels que x et x' appartiennent à la même \mathcal{S} -classe. Puisque les images de $S(x, y)$ et $S(x', y)$ sont égales dans l'espace quotient $\mathcal{S} \backslash \mathcal{R}$, cette application passe au quotient et on obtient l'application borélienne

$$\tilde{S} : (\mathcal{R}/\mathcal{S}, \pi_l) \longrightarrow (\mathcal{S} \backslash \mathcal{R}, \pi_r)$$

qui est un isomorphisme de \mathcal{R} -espaces fibrés standards.

2 Actions quasi-libres et arboralité

Rappelons qu'un (L-)graphage (cf. [Lev95], [KM04]) de \mathcal{R} munit canoniquement chaque classe de \mathcal{R} d'une structure de graphe connexe, son graphe de Cayley, dont les

sommets sont les éléments de cette classe. Un (L-)graphage de \mathcal{R} est un (L-)arborage si les graphes de Cayley de chaque classe de \mathcal{R} sont des arbres. Une relation d'équivalence borélienne est dite *arborable* si elle admet un (L-)arborage. Les relations d'équivalence boréliennes arborables jouent un rôle central dans la classe des relations d'équivalence boréliennes, au même titre que les groupes libres dans la classe des groupes. Bien souvent, les invariants qui ont été introduits pour étudier les relations d'équivalence mesurées (voir par exemple [Gab98], [Gab02]) ont d'abord été calculés pour les relations arborables. Dans ce paragraphe, nous allons donner une caractérisation des relations d'équivalence boréliennes arborables (th. 14) analogue à celle concernant les groupes libres : *un groupe est libre si et seulement s'il agit librement sur un arbre* (voir par exemple [Ser77]).

Comme nous l'avons déjà vu, une relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} sur X définit canoniquement un \mathcal{R} -espace fibré standard sur X via la projection π_L . Supposons que \mathcal{R} soit arborable et désignons par Φ un (L-)arborage de \mathcal{R} . Dans ce cas, les fibres de l'espace fibré standard canonique gauche sont naturellement munies d'une structure d'arbre (cf. *infra*). Définissons à présent les \mathcal{R} -champs de graphes boréliens et nous nous intéressons plus particulièrement au cas des \mathcal{R} -champs d'arbres boréliens qui sont les acteurs principaux de ce travail.

Définition 13 (\mathcal{R} -arboretum). *Un \mathcal{R} -champ de graphes borélien (\mathcal{A}, π) sur X est un graphe dont les espaces de sommets et d'arêtes sont des \mathcal{R} -espaces fibrés standards (\mathcal{A}^0, π^0) et (\mathcal{A}^1, π^1) sur X et tel que les applications sommet origine $o : \mathcal{A}^1 \rightarrow \mathcal{A}^0$, sommet terminal $t : \mathcal{A}^1 \rightarrow \mathcal{A}^0$ et arête opposée $^- : \mathcal{A}^1 \rightarrow \mathcal{A}^1$ soient des morphismes de \mathcal{R} -espaces fibrés standards.*

La fibre dans \mathcal{A} d'un élément de x , notée \mathcal{A}_x , est le sous-graphe d'ensemble de sommets $(\pi^0)^{-1}(x)$ et d'ensemble d'arêtes $(\pi^1)^{-1}(x)$. Si \mathcal{A}_x est un arbre pour tout x de X , nous dirons que (\mathcal{A}, π) est un \mathcal{R} -arboretum.

Remarque : Les définitions précédentes dans le cas de la relation d'équivalence borélienne à classes triviales sur X permettent de définir les notions de *champ de graphes borélien* et d'*arboretum* sur X .

Exemple fondamental : Tout graphage Φ ([KM04]) sur X définit un \mathcal{R}_Φ -champ de graphes borélien sur X où \mathcal{R}_Φ est la relation d'équivalence borélienne engendrée par Φ . L'espace des sommets est le \mathcal{R}_Φ -espace fibré standard canonique gauche et \mathcal{R}_Φ agit naturellement sur l'espace des arêtes défini par le graphage Φ : l'image par le couple d'éléments \mathcal{R}_Φ -équivalents (x', x) de l'arête $(y, z)_x$ dans la fibre de x est l'arête $(y, z)_{x'}$ dans la fibre de x' . Notons que l'action est, par définition, lisse sur l'espace des sommets et que la projection π_r de l'espace des sommets dans X est invariante sous l'action de \mathcal{R}_Φ . Si Φ est un arborage, nous désignerons par (\mathcal{A}_Φ, π) le \mathcal{R}_Φ -arboretum canonique associé à Φ sur X ci-dessus.

Nous venons de voir dans l'exemple précédent que si \mathcal{R} est arborable, alors elle agit quasi-librement sur l'espace des sommets d'un arboretum. Puisque le stabilisateur d'une section partielle d'arêtes est toujours une sous-relation du stabilisateur de la section de sommets origines associée, on en déduit que si \mathcal{R} agit quasi-librement sur l'espace des sommets d'un arboretum (et plus généralement d'un champ de graphes borélien), alors \mathcal{R} agit également quasi-librement sur l'espace des arêtes. Ainsi, nous dirons que \mathcal{R} agit *quasi-librement* sur un champ de graphes borélien si \mathcal{R} agit quasi-librement sur l'espace des sommets.

Nous allons à présent voir qu'il s'agit en fait d'une caractérisation des relations

d'équivalence boréliennes arborables et en donner un corollaire immédiat (le reste de cette section est consacré à la démonstration du théorème).

Théorème 14. *Une relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} est arborable si et seulement s'il existe une action quasi-libre de \mathcal{R} sur un arboretum.*

Puisqu'une sous-relation d'une relation d'équivalence borélienne lisse est lisse, la proposition 12 et le théorème précédent nous permettent de démontrer un analogue du théorème de Nielsen-Schreier en théorie des groupes : *un sous-groupe d'un groupe libre est libre.*

Corollaire 15 (voir aussi [JKL02] et [Gab00]). *Une sous-relation d'une relation d'équivalence borélienne arborable est arborable.*

Remarque : Si A est une partie borélienne de X et si \mathcal{R} est arborable, on déduit du corollaire précédent que la restriction de \mathcal{R} à A est encore arborable (il suffit de prolonger $\mathcal{R}|_A$ par la relation triviale en dehors de A).

Étant donné une action quasi-libre d'une relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} sur un arboretum \mathcal{A} , nous allons d'abord montrer l'existence d'un sous-arboretum \mathcal{A}' de \mathcal{A} défini sur une partie borélienne de X dont l'espace des sommets \mathcal{A}'^0 est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}'^0}$. Nous nous ramenons ensuite au cas d'une action de \mathcal{R} sur un arboretum \mathcal{A}'' ayant une section partielle de sommets $s : A \subset X \longrightarrow \mathcal{A}''^0$ dont l'image $s(A)$ est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}''^0}$, ce qui nous permettra de conclure grâce au lemme suivant :

Lemme 16. *Si \mathcal{A} est un \mathcal{R} -arboretum sur X et s une section partielle de sommets dont l'image est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$, alors \mathcal{R} est arborable.*

Démonstration : Commençons par supposer que s soit une section borélienne, c'est-à-dire définie sur X tout entier. Comme nous l'avons déjà vu (cf. prop. 7), l'espace des sommets \mathcal{A}^0 s'identifie naturellement avec le \mathcal{R} -espace fibré standard canonique gauche. L'ensemble des arêtes de \mathcal{A} dont l'un des sommets appartient à l'image de la section borélienne de sommets s s'identifie alors à une partie borélienne Gr de $X \times X$ qui, par construction, est un arborage de \mathcal{R} : un couple d'éléments distincts \mathcal{R} -équivalents (x, y) appartient à Gr si, par définition, les sommets (x, x) et (x, y) sont adjacents dans l'arboretum \mathcal{A} .

Le cas général s'en déduit facilement grâce au fait général suivant. Étant donné une relation d'équivalence borélienne \mathcal{R}' sur X , un domaine complet A' de \mathcal{R}' et un morphisme intérieur $r : X \longrightarrow A'$ qui coïncide avec l'identité sur A' , définissons la sous-relation \mathcal{T}' de \mathcal{R}' dont les classes sont les $r^{-1}(r(x))$ pour tout x de X : en particulier, \mathcal{T}' est lisse de domaine fondamental A' , donc arborable. Or, par construction, \mathcal{R}' est le produit libre (cf. déf. 19) des sous-relations \mathcal{T}' et \mathcal{R}'' où \mathcal{R}'' coïncide avec $\mathcal{R}'|_{A'}$ sur A' et avec la relation triviale sur le complémentaire de A' . Enfin, le produit libre de deux relations d'équivalence boréliennes arborables étant arborable (cf. prop. 20, voir aussi [JKL02] ou [Gab00]), on en déduit que si $\mathcal{R}'|_{A'}$ est arborable, alors il en est de même de \mathcal{R}' . □

Nous en venons au point central dans la démonstration du théorème 14.

Proposition 17. *Si \mathcal{R} agit quasi-librement sur un arboretum \mathcal{A} , alors il existe un sous-arboretum \mathcal{A}' de la restriction de \mathcal{A} à une partie borélienne A de X tel que l'espace des sommets \mathcal{A}'^0 soit un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}'^0}$.*

Remarque : Notons que la proposition précédente s'étend sans difficulté supplémentaire au cas d'un \mathcal{R} -champ de graphes borélien \mathcal{A} .

Démonstration : Donnons-nous une numérotation borélienne indexée par les entiers dans chaque fibre de l'espace des sommets \mathcal{A}^0 . Nous allons construire la partie borélienne \mathcal{A}'^0 par étape à partir de sections partielles de sommets de \mathcal{A}^0 . Soit s_1 la section borélienne de sommets de \mathcal{A}^0 correspondant au numéro le plus petit dans chaque fibre. Puisque l'action de \mathcal{R} sur \mathcal{A} est quasi-libre, le stabilisateur de cette section est lisse. Désignons par X_1 un domaine fondamental de $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s_1)$: cette partie borélienne de X est un domaine complet de \mathcal{R} et par suite, le $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$ -saturé de $U_1 = s_1(X_1)$ rencontre toutes les fibres de \mathcal{A}^0 . Notons C_1 le complémentaire dans \mathcal{A}^0 du saturé de U_1 . Si C_1 est vide, alors U_1 est un domaine fondamental pour l'action de \mathcal{R} sur \mathcal{A}^0 et le résultat est démontré avec $\mathcal{A}'^0 = U_1$ et $\mathcal{A}'^1 = \emptyset$.

Soit un entier naturel $n \geq 2$. Supposons avoir construit les familles finies de sections partielles $S_j = \{s_i ; i \in I_j\}$ ($1 \leq j \leq n-1$) de \mathcal{A}^0 dont les domaines de définition sont des parties boréliennes de X_1 et vérifiant les deux conditions suivantes : la réunion U_{n-1} des images de ces sections partielles est une partie borélienne de \mathcal{A}^0 sur laquelle la restriction de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$ est triviale et l'intersection de U_{n-1} avec chaque fibre de \mathcal{A} au-dessus de X_1 définit une partie connexe. Notons C_{n-1} le complémentaire dans \mathcal{A}^0 du saturé de U_{n-1} . Si ce dernier est vide, la proposition est démontrée avec $\mathcal{A}'^0 = U_{n-1}$ et \mathcal{A}'^1 la partie borélienne de \mathcal{A}^1 constituée des arêtes dont les deux extrémités appartiennent à U_{n-1} .

Sinon, il existe des éléments de C_{n-1} à distance unité de U_{n-1} . En effet, les fibres de \mathcal{A} étant connexes, il existe des éléments de C_{n-1} à distance unité du saturé de U_{n-1} et \mathcal{R} agit en préservant les distances sur \mathcal{A}^0 . Désignons par s_n la section partielle (définie sur une partie borélienne de X_1 a priori) de sommets de \mathcal{A}^0 qui a pour image le plus petit élément à distance unité de U_{n-1} dans chaque fibre. L'action étant quasi-libre, notons X_n un domaine fondamental du stabilisateur de s_n : c'est une partie borélienne de X_1 . Quitte à découper X_n en un nombre fini de parties boréliennes, on peut raffiner s_n en un nombre fini $S_n = \{s_i ; i \in I_n\}$ de sections partielles dont chacune est telle que les éléments de son image soient à distance unité de l'image de l'une des sections partielles déjà construites.

Montrons désormais que le saturé de la réunion des U_k est égal à l'espace des sommets \mathcal{A}^0 . Sinon il existerait un élément a appartenant au complémentaire du saturé de la réunion des U_k dans \mathcal{A}^0 dont la projection $\pi(a)$ serait un élément de X_1 . On peut supposer que dans la fibre de $\pi(a)$, le sommet a soit à distance unité de la partie connexe formée par la réunion des sommets $s_k(\pi(a))$ et de numéro minimal. Désignons par n_0 l'entier naturel tel que les sommets a et $s_{n_0}(\pi(a))$ soient adjacents. Mais alors, par construction de la section partielle s_{n_0+1} , le sommet a devrait être l'image de $\pi(a)$ par s_{n_0+1} , ce qui est absurde.

Il ne reste plus qu'à poser $\mathcal{A}'^0 = \bigcup_{k \geq 1} U_k$ et \mathcal{A}'^1 la partie borélienne de \mathcal{A}^1 constituée des arêtes dont les deux extrémités appartiennent à \mathcal{A}'^0 . Par construction, deux sommets de \mathcal{A} dans la même orbite n'appartiennent pas tous les deux à \mathcal{A}'^0 ; puisque le saturé de la réunion des U_k est égal à l'espace des sommets \mathcal{A}^0 , on en déduit que \mathcal{A}'^0 est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$. Enfin, notre construction assure à chaque étape que les fibres de \mathcal{A}' soient connexes. □

À partir du sous-arboretum \mathcal{A}' construit dans la proposition précédente, nous allons effectuer une opération de contraction dans les fibres et obtenir un nouvel \mathcal{R} -

arboretum \mathcal{A}'' ayant une section partielle de sommets dont l'image est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}''^0}$.

Lemme 18. *Il existe un \mathcal{R} -arboretum \mathcal{A}'' sur X ayant une section partielle de sommets s définie sur A dont l'image est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}''^0}$.*

Démonstration : Soit s une section borélienne de sommets de \mathcal{A}' : son image est un domaine fondamental de la relation d'équivalence borélienne lisse \mathcal{S} définie sur \mathcal{A}'^0 dont les classes sont les fibres de \mathcal{A}'^0 . Pour tout élément x de A , contractons le sous-arbre \mathcal{A}'_x sur le sommet $s(x)$ dans l'arbre \mathcal{A}_x (l'espace quotient est un espace borélien standard isomorphe à $s(A)$ par construction). On prolonge cette opération par \mathcal{R} -équivariance et on obtient ainsi un \mathcal{R} -arboretum \mathcal{A}'' sur X ayant une section partielle de sommets privilégiée (encore notée s) définie sur A . Si x et y sont deux éléments \mathcal{R} -équivalents de A , l'image par le couple d'éléments (x, y) du sous-arbre \mathcal{A}'_y de la fibre de y dans la fibre de x est un sous-arbre disjoint de \mathcal{A}'_x puisque par hypothèse \mathcal{A}'^0 est un domaine fondamental de l'action de \mathcal{R} sur l'espace des sommets \mathcal{A}'^0 de \mathcal{A} . Par suite, s est une section partielle dont l'image est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}''^0}$. □

Ceci termine la démonstration du théorème 14 dont nous rappelons brièvement les trois étapes de la réciproque. Étant donné une action quasi-libre de \mathcal{R} sur un arboretum \mathcal{A} sur X :

1. construction d'un sous-arboretum \mathcal{A}' défini sur une partie borélienne $A \subset X$ de $\mathcal{A}|_A$ dont l'espace des sommets \mathcal{A}'^0 est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}'^0}$ (prop. 17) ;
2. opération de contraction pour se ramener au cas d'une action de \mathcal{R} sur un arboretum \mathcal{A}'' ayant une section partielle de sommets s dont l'image $s(A)$ est un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}''^0}$ (lem. 18) ;
3. une telle relation est alors arborable (lem. 16).

II \mathcal{R} -arboretums et amalgames de sous-relations

Nous allons nous intéresser dans cette partie aux relations d'équivalence boréliennes qui sont des produits libres de deux sous-relations et, plus généralement, des produits amalgamés suivant une sous-relation commune. Il s'agit en fait de discuter des liens étroits entre décomposition d'une telle relation d'équivalence borélienne et ses actions sur des arboretums. Nous avons vu (cf. § 2) que si une relation d'équivalence borélienne agit quasi-librement sur un arboretum, alors elle est arborable. Nous souhaitons nous affranchir progressivement de l'hypothèse faite sur l'action et nous traiterons le cas général dans le prochain paragraphe (cf. § III). Cette partie a pour but de décrire la situation dans le cas d'un « espace quotient » simple.

1 Produit libre de deux sous-relations

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence borélienne engendrée par deux sous-relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sur X . Autrement dit, \mathcal{R} est la plus petite relation d'équivalence dont les classes contiennent celles de \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 . Soit un entier naturel $n \geq 2$. Un n -uplet (x_1, x_2, \dots, x_n) d'éléments de X est dit *réduit* si :

- pour tout i dans $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$, le couple (x_i, x_{i+1}) est un couple d'éléments \mathcal{R}_1 ou \mathcal{R}_2 -équivalents et deux couples successifs ne sont pas \mathcal{R}_j -équivalents pour le même j ;
- $x_1 \neq x_2$ si $n = 2$.

Définition 19 (Gaboriau, [Gab00]). *La relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} sur X est le produit libre des sous-relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 si \mathcal{R} est engendrée par \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 et si, pour tout n -uplet réduit (x_1, x_2, \dots, x_n) d'éléments de X , x_n est différent de x_1 . Dans ce cas, on note $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \star \mathcal{R}_2$.*

Exemple : Soit Γ_1 et Γ_2 deux groupes dénombrables et une action libre α du produit libre $\Gamma = \Gamma_1 \star \Gamma_2$ sur X . La relation d'équivalence borélienne \mathcal{R}_α dont les classes sont les orbites de l'action de Γ est le produit libre des sous-relations \mathcal{R}_{α_1} et \mathcal{R}_{α_2} dont les classes sont les orbites des restrictions de α à Γ_1 et Γ_2 .

Avec les techniques que nous avons développées jusqu'à présent, il est très facile de voir que l'arborabilité est stable par produit libre.

Proposition 20. *Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence borélienne sur X . Si \mathcal{R} est le produit libre de deux sous-relations arborables, alors \mathcal{R} est arborable.*

Démonstration : Il suffit de construire un \mathcal{R} -arboretum tel que l'espace des sommets soit le \mathcal{R} -espace fibré standard canonique (cas particulier d'une section borélienne définie sur X dans le lemme 16). Étant donné des arborages de \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 respectivement, on s'intéresse aux arboretums canoniques associés à ces arborages (cf. ex. fond. suivant déf. 13). Rappelons que les espaces des sommets de ces arboretums sont respectivement les \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 -espaces fibrés standards canoniques gauches. Considérons la réunion disjointe de ces deux arboretums sur X , quotientée par la relation d'équivalence qui identifie $d_1(x)$ et $d_2(x)$ pour tout élément x de X . On obtient ainsi un nouvel arboretum \mathcal{A}' sur X dont on note d la section borélienne commune $d_1 = d_2$. Puisque \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 engendrent \mathcal{R} et agissent respectivement sur chacune des moitiés de \mathcal{A}' , on peut prolonger \mathcal{A}' de manière \mathcal{R} -équivariante. On obtient alors un \mathcal{R} -champ de graphes borélien connexes \mathcal{A} ; les sous-relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 étant en produit libre, ceci assure que les fibres de \mathcal{A} soient des arbres. Autrement dit, \mathcal{A} est un \mathcal{R} -arboretum tel que l'image de la section borélienne d soit un domaine fondamental de l'action de \mathcal{R} sur \mathcal{A}^0 , ce qui assure que \mathcal{A}^0 s'identifie au \mathcal{R} -espace fibré standard canonique. \square

Remarque : Voici une deuxième démonstration de la proposition précédente, très similaire à la précédente. Considérons Gr_1 et Gr_2 des arborages de \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 respectivement et notons Gr la réunion de Gr_1 et Gr_2 : c'est une partie borélienne de $X \times X$, symétrique, qui ne rencontre pas la diagonale, autrement dit un graphage. Puisque Gr_1 et Gr_2 engendrent respectivement \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 et que ces dernières engendrent \mathcal{R} , on en déduit que Gr engendre \mathcal{R} , autrement dit que Gr est un graphage de \mathcal{R} . Enfin, s'il existait un cycle de longueur $n \geq 2$ dans le graphage Gr , on en déduirait alors un n -uplet réduit (x_1, x_2, \dots, x_n) d'éléments de X tel que $x_n = x_1$, ce qui est exclu. Et ainsi, Gr est un arborage de \mathcal{R} .

Considérons une relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} sur X qui est le produit libre des sous-relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 définies sur X . Nous allons construire un \mathcal{R} -arboretum sur X canoniquement associé à cette décomposition. Désignons par $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}/\mathcal{R}_2$ les \mathcal{R} -espaces fibrés standards canoniques associés aux sous-relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 . De plus, nous avons vu qu'il existait, à valeurs dans chacun de ces \mathcal{R} -espaces fibrés

standards, un morphisme surjectif défini sur le \mathcal{R} -espace fibré standard canonique (cf. lem. 6 avec $A = X$, $s_1 = d$ et $s_2 = d_{\mathcal{R}_i}$), qui envoie la section diagonale d sur la section borélienne saturante $d_{\mathcal{R}_i}$. Notons o le morphisme surjectif du \mathcal{R} -espace fibré standard canonique dans $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ et t celui à valeurs dans $\mathcal{R}/\mathcal{R}_2$.

Convenons d'appeler *espace des arêtes orientées* le \mathcal{R} -espace fibré standard canonique et *espace des sommets* la réunion disjointe des \mathcal{R} -espaces fibrés standards $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ (espace des sommets de couleur 1) et $\mathcal{R}/\mathcal{R}_2$ (espace des sommets de couleur 2). Nous désignerons également par *sommet origine* le morphisme de \mathcal{R} -espaces fibrés standards o et par *sommet terminal* le morphisme t . Enfin, il n'est pas difficile de vérifier la compatibilité des actions de \mathcal{R} entre les espaces de sommets et d'arêtes. Ainsi nous avons défini un \mathcal{R} -champ de graphes borélien. La proposition qui suit assure qu'il s'agisse en fait d'un arboretum : cette construction est analogue à la construction de l'arbre de Bass-Serre associé à un produit libre de deux groupes (cf. [Ser77]).

Proposition 21. *Les fibres du \mathcal{R} -champ de graphes borélien construit ci-dessus à partir d'une décomposition de \mathcal{R} en produit libre de deux sous-relations définies sur X sont des arbres.*

Dans la suite, nous dirons que le \mathcal{R} -arboretum construit précédemment est le \mathcal{R} -arboretum canonique associé à $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \star \mathcal{R}_2$.

Démonstration : Il s'agit de vérifier que, pour tout élément x de X , la fibre de x est un arbre, c'est-à-dire connexe et sans circuit (puisqu'on sait déjà qu'elle est non vide). Soit P et Q deux sommets distincts dans le graphe au-dessus de x . Par définition de l'espace des sommets, P et Q correspondent à des \mathcal{R}_1 ou \mathcal{R}_2 -classes contenues dans la \mathcal{R} -classe de x . Désignons par p et q des représentants des classes correspondantes : ce sont donc des éléments \mathcal{R} -équivalents de x . Puisque \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 engendrent \mathcal{R} , il existe un n -uplet d'éléments que l'on peut supposer réduit dans la \mathcal{R} -classe de x dont le premier élément est p et le dernier q . Dans le graphe au-dessus de x , ce n -uplet correspond à un chemin joignant les sommets P et Q .

Supposons par l'absurde qu'il existe un circuit dans le graphe au-dessus de x dont on note P_0, \dots, P_{n-1} les sommets ($P_n = P_0$). Pour i dans $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$, les sommets P_i et P_{i+1} sont par hypothèse reliés : il existe donc un élément x_{i+1} appartenant à X dont la \mathcal{R}_1 -classe correspond à P_i et la \mathcal{R}_2 -classe à P_{i+1} (ou l'inverse). De plus, par construction, deux sommets consécutifs sont de couleurs distinctes. Par suite, on construit un n -uplet (x_1, x_2, \dots, x_n) réduit. Mais x_1 et x_n étant \mathcal{R}_j -équivalents puisque les sommets P_0 et P_n sont égaux, ceci est absurde. \square

Par construction, le \mathcal{R} -arboretum canonique associé à $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \star \mathcal{R}_2$ possède une section borélienne d'arêtes dont l'image est un domaine fondamental pour l'action de \mathcal{R} sur l'espace des arêtes orientées et dont les sections boréliennes de sommets associées ont leurs images qui forment une partition de l'espace des sommets en deux. De plus, les stabilisateurs de ces sections boréliennes de sommets sont \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 . Par suite, notons que pour toute arête de l'espace des arêtes, l'un de ses sommets est de couleur 1 et l'autre de couleur 2.

Nous allons désormais démontrer la réciproque de ce résultat et voir que les produits libres de sous-relations sont caractérisés par de telles actions : en un certain sens, la relation d'équivalence borélienne engendrée sur l'espace des arêtes est la plus simple possible.

Théorème 22. *Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence borélienne sur X . Supposons que \mathcal{R} agisse sur un arboretum \mathcal{A} dont l'espace des arêtes orientées \mathcal{A}^{1+} est le \mathcal{R} -espace fibré standard canonique et tel que les saturés des images des sections boréliennes de sommets $o(d)$ et $t(d)$ forment une partition borélienne de l'espace des sommets en deux. Alors \mathcal{R} est le produit libre des stabilisateurs de $o(d)$ et de $t(d)$:*

$$\mathcal{R} = \text{Stab}_{\mathcal{R}}(o(d)) \star \text{Stab}_{\mathcal{R}}(t(d)).$$

Démonstration : Notons \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 les stabilisateurs de $o(d)$ et $t(d)$ respectivement et commençons par montrer que \mathcal{R} est engendrée par \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 . Soit x et y deux éléments \mathcal{R} -équivalents de X et considérons l'image $(x, y) \cdot d(y)$ par le couple d'éléments (x, y) de l'arête $d(y)$. Les arêtes $d(x)$ et $(x, y) \cdot d(y)$ appartiennent à la fibre \mathcal{A}_x de x et il existe donc une (unique) géodésique c entre les sommets $o(d(x))$ et $t((x, y) \cdot d(y))$ qui sont distincts par hypothèse. Si n est la longueur de ce chemin, désignons par (w_1, w_2, \dots, w_n) les arêtes de c . Chacune d'entre elles appartient à l'orbite d'une unique arête appartenant à l'image de d ou à l'image de \bar{d} et, étant donné deux arêtes consécutives, l'une appartient à l'orbite de l'image de d et l'autre à l'orbite de l'image de \bar{d} . Puisque l'espace des arêtes orientées est par hypothèse le \mathcal{R} -espace fibré standard canonique gauche, chacune des arêtes w_i est un couple d'éléments (x, x_i) . On en déduit ainsi un n -uplet (x_1, x_2, \dots, x_n) d'éléments de X dont le premier coïncide avec x , le dernier avec y et tel que deux éléments successifs soient \mathcal{R}_j -équivalents pour un certain j .

Soit x et y deux éléments \mathcal{R}_j -équivalents de X . L'image du sommet $t(d(y))$ par le couple d'éléments (x, y) est un sommet à distance unité du sommet origine de $d(x)$. Si (x_1, x_2, \dots, x_n) désigne un n -uplet réduit, on en déduit par récurrence que le sommet terminal de $(x_1, x_n) \cdot d(x_n)$ est au moins à distance unité du sommet origine de $d(x_1)$: ceci exclut la possibilité que x_1 soit égal à x_n . □

On déduit du théorème précédent le cas où l'espace des arêtes orientées est engendré par l'image d'une section partielle dont le stabilisateur est trivial.

Corollaire 23. *Soit \mathcal{A} un \mathcal{R} -arboretum sur X . On suppose qu'il existe une section partielle d (définie sur A) de l'espace des arêtes orientées telle que $s(A)$ soit un domaine fondamental de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^{1+}}$. En outre, on suppose que les saturés des images des sections partielles de sommets $o(d)$ et $t(d)$ forment une partition borélienne de l'espace des sommets en deux. Alors la restriction de \mathcal{R} à A est le produit libre de ses sous-relations $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(o(d))$ et $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(t(d))$. □*

En particulier, on en déduit qu'une telle relation d'équivalence borélienne est stablement orbitalement équivalente à un produit libre de deux sous-relations.

2 Produit amalgamé de deux sous-relations

Nous allons généraliser au cas des produits amalgamés suivant une sous-relation commune (cf. déf. 24) les résultats obtenus dans le paragraphe précédent. Puis nous terminons cette partie en donnant une application qui illustre que les méthodes géométriques que nous développons permettent de démontrer simplement des résultats de nature algébrique.

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence borélienne sur X engendrée par deux sous-relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 . Soit \mathcal{R}_3 une sous-relation commune à \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 . Soit un entier naturel $n \geq 2$. Un n -uplet (x_1, x_2, \dots, x_n) d'éléments de X est dit *réduit* si, pour tout i de $\llbracket 1; n-1 \rrbracket$:

- chaque (x_i, x_{i+1}) est un couple d'éléments \mathcal{R}_1 -équivalents ou \mathcal{R}_2 -équivalents et deux couples successifs ne sont pas \mathcal{R}_j -équivalents pour le même j ;
- aucun couple d'éléments (x_i, x_{i+1}) n'est \mathcal{R}_3 -équivalent dès que $n > 2$;
- $x_1 \neq x_2$ si $n = 2$.

Définition 24 (Gaboriau, [Gab00]). *La relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} est le produit amalgamé des sous-relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 suivant la sous-relation \mathcal{R}_3 si, pour tout n -uplet réduit (x_1, x_2, \dots, x_n) d'éléments de X , x_n est différent de x_1 . Dans ce cas, on note*

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \star_{\mathcal{R}_3} \mathcal{R}_2.$$

Remarque : Dans le cas où la sous-relation \mathcal{R}_3 est triviale, la notion de produit amalgamé des sous-relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 suivant la sous-relation \mathcal{R}_3 coïncide avec celle de produit libre des sous-relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 (cf. déf. 19).

Exemple : Si un groupe dénombrable Γ est le produit amalgamé de deux groupes Γ_1 et Γ_2 suivant un sous-groupe commun Γ_3 et agit librement sur X , la relation d'équivalence borélienne \mathcal{R}_α engendrée par les orbites de l'action α de Γ est le produit amalgamé des sous-relations \mathcal{R}_{α_1} et \mathcal{R}_{α_2} suivant la sous-relation \mathcal{R}_{α_3} .

À toute relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} sur X qui est le produit amalgamé des sous-relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 suivant la sous-relation \mathcal{R}_3 , nous allons associer canoniquement un \mathcal{R} -arboretum $\mathcal{A}(\mathcal{R}_1 \star_{\mathcal{R}_3} \mathcal{R}_2)$ sur X . Désignons par $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}/\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}/\mathcal{R}_3$ les \mathcal{R} -espaces fibrés standards canoniques associés aux paires $(\mathcal{R}, \mathcal{R}_1)$, $(\mathcal{R}, \mathcal{R}_2)$ et $(\mathcal{R}, \mathcal{R}_3)$. Or \mathcal{R}_3 étant une sous-relation commune de \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 , on déduit du lemme 6 un morphisme surjectif o de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_3$ dans $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ envoyant la section borélienne saturante $d_{\mathcal{R}_3}$ sur la section borélienne saturante $d_{\mathcal{R}_1}$, et de même un morphisme surjectif t de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_3$ dans $\mathcal{R}/\mathcal{R}_2$ envoyant $d_{\mathcal{R}_3}$ sur $d_{\mathcal{R}_2}$.

On définit l'espace des arêtes orientées comme étant $\mathcal{R}/\mathcal{R}_3$ et l'espace des sommets comme la réunion disjointe de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ (espace des sommets de couleur 1) et $\mathcal{R}/\mathcal{R}_2$ (espace des sommets de couleur 2). L'application sommet origine est définie comme étant le morphisme de \mathcal{R} -espaces fibrés standards o et l'application sommet terminal est définie comme étant le morphisme t . La compatibilité des actions de \mathcal{R} entre les espaces de sommets et d'arêtes assure que nous avons ainsi défini un \mathcal{R} -champ de graphes borélien \mathcal{A} . Nous allons maintenant démontrer que les fibres de \mathcal{A} sont des arbres, ce qui montrera que \mathcal{A} est un \mathcal{R} -arboretum. Pour ceci, nous allons donner une caractérisation dynamique des produits amalgamés de sous-relations.

Théorème 25. *Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence borélienne et \mathcal{A} un \mathcal{R} -champ de graphes borélien sur X . On suppose que l'espace des arêtes orientées \mathcal{A}^{1+} est un espace fibré standard homogène dont on note $s : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}^{1+}$ une section partielle saturante. De plus, on suppose que les saturés des images des sections partielles de sommets $o(s)$ et $t(s)$ forment une partition \mathcal{R} -invariante de l'espace des sommets en deux. Les assertions suivantes sont alors équivalentes :*

1. \mathcal{A} est un \mathcal{R} -arboretum ;
2. $\mathcal{R}|_{\mathcal{A}}$ est le produit amalgamé des sous-relations $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(o(s))$ et $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(t(s))$ suivant la sous-relation $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s)$.

Démonstration : Puisque A est un domaine complet de \mathcal{R} , quitte à considérer le \mathcal{R}_A -arboretum sur A , on peut supposer que $A = X$ et se ramener au cas d'une section borélienne saturante de l'espace des arêtes orientées. Notons $\mathcal{R}_3 = \text{Stab}_{\mathcal{R}}(s)$ le stabilisateur de s , et $\mathcal{R}_1 = \text{Stab}_{\mathcal{R}}(o(s))$ et $\mathcal{R}_2 = \text{Stab}_{\mathcal{R}}(t(s))$ les stabilisateurs des sections boréliennes de sommets origines $o(s)$ et de sommets terminaux $t(s)$ correspondantes. Le théorème est alors une conséquence des deux lemmes suivants.

Lemme 26. *Les fibres de \mathcal{A} sont connexes si et seulement si \mathcal{R} est engendrée par \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 .*

Démonstration : Soit \mathcal{A}' le champ de sous-graphes borélien de \mathcal{A} sur X dont les fibres sont les composantes connexes de l'image de la section borélienne d'arêtes s . Soit \mathcal{R}' la sous-relation de \mathcal{R} qui laisse invariant le champ de sous-graphes borélien \mathcal{A}' : deux éléments x et y de X sont \mathcal{R}' -équivalents si l'image par le couple d'éléments (y, x) de \mathcal{A}'_x est égale à \mathcal{A}'_y . Enfin on note \mathcal{R}'' la sous-relation de \mathcal{R} engendrée par \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 . Si deux éléments x et y de X sont \mathcal{R}_1 ou \mathcal{R}_2 -équivalents, les arêtes $s(y)$ et $(y, x) \cdot s(x)$ ont un sommet en commun. L'arête $(y, x) \cdot s(x)$ appartient donc à \mathcal{A}'_y et par suite

$$(y, x) \cdot \mathcal{A}'_x = \mathcal{A}'_y,$$

ce qui prouve que \mathcal{R}'' est une sous-relation de \mathcal{R}' .

Notons \mathcal{B}_1 le champ de sous-graphes borélien de \mathcal{A} dont les arêtes sont les éléments du \mathcal{R}'' -saturé de l'image de la section borélienne d'arêtes s . Considérons \mathcal{B}_2 le champ de sous-graphes borélien de \mathcal{A} dont les arêtes dans la fibre d'un élément x de X sont les $(x, y) \cdot s(y)$, où y est un élément \mathcal{R} -équivalent à x et n'appartenant pas à la \mathcal{R}'' -classe de x . Comme l'image de s est un domaine complet de la relation d'équivalence borélienne \mathcal{R}_{A^+} engendrée sur l'espace des arêtes orientées, la réunion des champs de sous-graphes boréliens disjoints \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 est égale à \mathcal{A} . Ceci implique que \mathcal{B}_1 contient \mathcal{A}' , et donc que \mathcal{R}' est une sous-relation de \mathcal{R}'' .

Les fibres de \mathcal{A} sont connexes si et seulement si les champs de graphes borélien \mathcal{A}' et \mathcal{A} sont égaux, c'est-à-dire si et seulement si \mathcal{R} et \mathcal{R}' sont égales, et d'après ce qui précède \mathcal{R}' et \mathcal{R}'' coïncident. □

Lemme 27. *Pour qu'aucune fibre de \mathcal{A} ne contienne de circuit, il faut et il suffit que pour tout $(n + 1)$ -uplet réduit (x_1, x_2, \dots, x_n) d'éléments de X , l'élément x_n soit différent de x_1 .*

Démonstration : Pour tout élément x de X , la donnée d'un chemin $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ ($n \geq 1$) sans aller-retour dans la fibre \mathcal{A}_x de x est équivalente à la donnée d'un n -uplet (x_1, x_2, \dots, x_n) réduit d'éléments de X dans la \mathcal{R} -classe de x . En effet, chacune des arêtes de c appartient à l'orbite d'une arête appartenant à l'image de s ou à l'image de \bar{s} , donc pour tout i , il existe x_i dans la \mathcal{R} -classe de x tel que $c_i = (x, x_i) \cdot s(x_i)$ ou $c_i = (x, x_i) \cdot \bar{s}(x_i)$. De plus, étant donné deux arêtes consécutives, l'une appartient à l'orbite de l'image de s et l'autre à l'orbite de l'image de \bar{s} d'après l'hypothèse faite sur l'espace des sommets de \mathcal{A} . Réciproquement, un tel n -uplet définit bien un chemin sans aller-retour dans la fibre de x dont les arêtes sont les $(x, x_i) \cdot s(x_i)$.

Enfin, le chemin c est un circuit (c'est-à-dire tel que les sommets origine $o(c)$ et terminal $t(c)$ soient les mêmes) si et seulement si les éléments x_1 et x_n sont \mathcal{R}_1 ou \mathcal{R}_2 -équivalents. □

Comme conséquence du théorème précédent et du fait déjà vu que

$$\text{Stab}_{\mathcal{R}}(\tilde{d}_3) = \mathcal{R}_3 \quad \text{Stab}_{\mathcal{R}}(o(\tilde{d}_3)) = \mathcal{R}_1 \quad \text{et} \quad \text{Stab}_{\mathcal{R}}(t(\tilde{d}_3)) = \mathcal{R}_2,$$

nous en déduisons le résultat annoncé :

Corollaire 28. *Si une relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} est le produit amalgamé de ses sous-relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 suivant la sous-relation \mathcal{R}_3 , alors $\mathcal{A}(\mathcal{R}_1 \star_{\mathcal{R}_3} \mathcal{R}_2)$ est un \mathcal{R} -arboretum.*

Nous dirons que \mathcal{A} est le \mathcal{R} -arboretum canonique associé à $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \star_{\mathcal{R}_3} \mathcal{R}_2$.

Pour terminer ce paragraphe, donnons une application de ce qui précède.

Proposition 29. *Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence borélienne qui est le produit amalgamé des sous-relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 suivant la sous-relation \mathcal{R}_3 . Supposons que \mathcal{S} soit une sous-relation de \mathcal{R} telle que, pour tout élément ϕ de $[[\mathcal{R}]]$, les intersections des sous-relations $\phi^{-1}\mathcal{R}_1\phi$ et $\phi^{-1}\mathcal{R}_2\phi$ avec \mathcal{S} soient lisses. Alors \mathcal{S} est une sous-relation arborable de \mathcal{R} .*

Démonstration : Considérons le \mathcal{R} -arboretum canonique \mathcal{A} associé à la décomposition de \mathcal{R} et montrons que l'action de \mathcal{S} sur \mathcal{A}^0 est quasi-libre. Soit s une section partielle de \mathcal{A}^0 . Quitte à découper en deux le domaine de définition de s , on peut supposer que s est une section partielle de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ (ou $\mathcal{R}/\mathcal{R}_2$). Autrement dit, de manière générale, si s est une section partielle de \mathcal{A}^0 définie sur $A \subset X$, alors A est la réunion disjointe des parties boréliennes A_1 et A_2 telles que $s(A_1) \subset \mathcal{A}^{0,1}$ et $s(A_2) \subset \mathcal{A}^{0,2}$, où $\mathcal{A}^{0,1}$ et $\mathcal{A}^{0,2}$ sont les espaces de sommets de \mathcal{A} de couleurs 1 et 2 respectivement. La sous-relation \mathcal{S} agit sur $\mathcal{A}^{0,1} = \mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ et, par suite, le \mathcal{S} -stabilisateur de s est l'intersection de \mathcal{S} avec une sous-relation de \mathcal{R} (définie sur le domaine de définition de s) stablement conjuguée à une restriction de \mathcal{R}_1 (cf. rem. 2 de la prop. 5). Une telle intersection étant lisse par hypothèse, on en déduit que \mathcal{S} agit quasi-librement sur \mathcal{A} et que \mathcal{S} est arborable (cf. th. 14). □

III \mathcal{R} -arboretums et décompositions de \mathcal{R}

Dans cette partie, nous nous intéressons au cas général d'une action d'une relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} sur un arboretum \mathcal{A} sur X . Nous sommes amenés à introduire la notion de *graphe de relations* (déf. 30) et les techniques que nous allons utiliser prolongent celles que nous avons développées dans le cas des actions quasi-libres (cf. § 2). En particulier, nous étudions comment reconstruire \mathcal{R} en termes de produits amalgamés à partir des stabilisateurs de certaines sections partielles de \mathcal{A} . Nous en déduisons un théorème de décomposition (th. 42) pour les sous-relations d'un produit libre dénombrable $\mathcal{R} = \star_{i \in I} \mathcal{R}_i$ de sous-relations \mathcal{R}_i ($i \in I$), ainsi que la structure de toute restriction de \mathcal{R} à une partie borélienne Y de X (th. 44).

1 Graphes de relations et désingularisations

Dans la démonstration de la proposition 17 lors de notre étude des actions quasi-libres sur un arboretum, nous avons implicitement construit un *arbre d'isomorphismes partiels*, c'est-à-dire un arbre dénombrable à chaque sommet duquel est attaché un espace borélien standard et à chaque arête un isomorphisme partiel entre des parties boréliennes des espaces boréliens standards portés par les extrémités de cette arête. La définition suivante généralise cette idée.

Définition 30 (Graphe de relations). *Un graphe de relations G^r est la donnée d'un graphe dénombrable G , d'une relation d'équivalence borélienne sur un espace borélien standard pour chaque sommet et chaque arête de G de sorte que les relations d'équivalence boréliennes portées par une arête et son arête opposée soient égales, ainsi que, pour chaque arête a de G , d'un morphisme injectif de la relation d'équivalence borélienne portée par a dans la relation d'équivalence borélienne portée par le sommet terminal de a . Si G est un arbre, nous dirons que G^r est un arbre de relations.*

Remarque : Dans le cas particulier où toutes les relations d'équivalence boréliennes portées par les sommets de G sont triviales, nous dirons que G^r est un *graphe d'isomorphismes partiels* (souvent noté G^{ip}) puisque la donnée de G^r permet d'attacher canoniquement à chaque arête a de G un isomorphisme partiel ϕ_a dont la source et le but sont des parties boréliennes des espaces boréliens standards portés par les sommets origine et terminal de a , de sorte que ϕ_a et $\phi_{\bar{a}}$ soient inverses l'un de l'autre. Si de plus, tous les espaces boréliens standards portés par les sommets de G sont des singletons, alors la donnée de G^{ip} est équivalente à celle du graphe G .

Étant donné un arbre d'isomorphismes partiels G^{ip} , considérons la réunion disjointe des espaces boréliens standards portés par les sommets de G . Les isomorphismes partiels canoniquement portés par les arêtes de G engendrent une relation d'équivalence borélienne lisse \mathcal{S} sur cette réunion disjointe. Un graphage Gr de \mathcal{S} est défini de la manière suivante : un couple d'éléments (x, y) appartient à Gr si x et y appartiennent aux espaces boréliens standards portés par des sommets adjacents de G et si y est l'image de x par l'isomorphisme partiel porté par l'une des deux arêtes (inverses l'une de l'autre) joignant ces deux sommets. De plus, étant donné une énumération des sommets de G , il n'est pas difficile d'exhiber par récurrence un domaine fondamental de \mathcal{S} . Notons D_1 l'espace borélien standard porté par le premier sommet : puisque le graphe G sous-jacent à G^{ip} est un arbre, D_1 ne rencontre au plus qu'une seule fois chaque classe de \mathcal{S} . Pour tout $k \geq 1$, ayant construit une partie borélienne D_k de la réunion des espaces boréliens standards portés par les k premiers sommets de G qui ne rencontre au plus qu'une seule fois chaque classe de \mathcal{S} , D_{k+1} est par définition la réunion de D_k et du complémentaire du saturé de D_k dans l'espace borélien standard porté par le sommet $k+1$ de G . La réunion croissante des D_k est un domaine fondamental de cette relation.

Un arbre d'isomorphismes partiels G^{ip} est dit *enraciné* s'il est muni d'un sommet, appelé *racine*, dont l'espace borélien standard attaché soit un domaine fondamental de cette relation d'équivalence borélienne. Notons que dans ce cas, l'isomorphisme partiel porté par une arête dont le sommet origine est celui de ses deux sommets le plus proche de la racine est surjectif. Un tel arbre d'isomorphismes partiels enraciné définit naturellement un arboretum sur l'espace borélien standard Y porté par sa racine. Si \mathcal{A} est un champ de graphes borélien sur X et G^{ip} un arbre d'isomorphismes partiels enraciné, une *représentation* de G^{ip} dans \mathcal{A} est la donnée d'un isomorphisme d'espaces boréliens standards entre Y et une partie borélienne X_Y de X et d'un isomorphisme χ entre l'arboretum défini par G^{ip} sur sa racine Y et un sous-arboretum de la restriction de \mathcal{A} à X_Y . On dit alors que χ est une représentation de G^{ip} dans \mathcal{A} et que les images (par l'isomorphisme de représentation χ) des espaces boréliens standards portés par les sommets et les arêtes de G^{ip} sont des *représentations* dans \mathcal{A} de ces espaces boréliens standards.

Étant donné une relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} sur X , considérons désormais le cas d'un \mathcal{R} -champ de graphes borélien \mathcal{A} sur X . Si χ est une représentation d'un arbre d'isomorphismes partiels enraciné G^{ip} dans \mathcal{A} , l'action de \mathcal{R} sur \mathcal{A} donne

naissance à des relations d'équivalence boréliennes sur les représentations dans \mathcal{A} des espaces boréliens standards de sommets et d'arêtes de G^{ip} : ce sont respectivement les restrictions de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^1}$. Une représentation de G^{ip} dans \mathcal{A} induit ainsi une structure d'arbre de relations G^r sur G^{ip} .

Via le foncteur d'oubli, à tout arbre de relations G^r est canoniquement associé un arbre d'isomorphismes partiels G^{ip} . Nous dirons qu'un arbre de relations G^r est *enraciné* si l'arbre d'isomorphismes partiels G^{ip} sous-jacent à G^r l'est. Une *représentation d'un arbre de relations enraciné G^r dans \mathcal{A}* est une représentation χ de G^{ip} dans \mathcal{A} telle que χ induise des isomorphismes de relations d'équivalence boréliennes entre les relations d'équivalence boréliennes portées par les sommets et les arêtes de G^r et les restrictions de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^1}$ aux représentations dans \mathcal{A} des espaces boréliens standards portés par les sommets et les arêtes de G^{ip} .

Définition 31 (Arboretum de représentants). *Soit \mathcal{A} un \mathcal{R} -champ de graphes borélien sur X . Un arboretum de représentants de l'action de \mathcal{R} sur \mathcal{A} est la donnée d'un arbre de relations enraciné G^r et d'une représentation χ de G^r dans \mathcal{A} telle que les $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$ -saturés des représentations des espaces boréliens standards portés par les sommets de G^r forment une partition de l'espace des sommets \mathcal{A}^0 .*

Remarque : Étant donné un relevé d'un arbre maximal de l'espace quotient d'une action d'un groupe sur un graphe connexe, on définit naturellement un arbre de groupes en considérant les stabilisateurs des sommets et des arêtes de ce relevé (cf. [Ser77]). Un arboretum de représentants correspond à une donnée analogue dans le cas des relations d'équivalence boréliennes.

Comme dans le cas d'une action quasi-libre sur un arboretum (cf. prop. 17), on démontre l'existence d'un arboretum de représentants pour toute action de \mathcal{R} sur un arboretum \mathcal{A} sur X .

Proposition 32. *Pour tout \mathcal{R} -arboretum \mathcal{A} sur X , il existe un arboretum de représentants de l'action de \mathcal{R} sur \mathcal{A} .*

Démonstration : L'idée de la preuve de l'existence d'un arboretum de représentants est essentiellement la même que dans le cas des actions quasi-libres (cf. prop. 17). Dans la démonstration de la proposition 17, nous prenions soin à chaque étape de considérer des sections partielles de sommets (et donc d'arêtes) dont les stabilisateurs étaient triviaux, ce qui était possible car $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^1}$ étaient des relations d'équivalence boréliennes lisses par hypothèse, pour ainsi construire un arbre d'isomorphismes partiels. Dans le cas général où $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^1}$ ne sont plus supposées lisses, il n'est plus possible *a priori* d'assurer que les stabilisateurs des sections partielles choisies soient triviaux à chaque étape de la construction. C'est ainsi que nous sommes contraints de passer des arbres d'isomorphismes partiels aux arbres de relations : le stabilisateur d'une section partielle de sommets ajoutée à l'étape $n + 1$ et le stabilisateur de la section partielle d'arêtes correspondante définissent des relations d'équivalence boréliennes portées par un sommet terminal attaché par une arête (et son arête opposée) à l'arbre de relations construit à l'étape n .

□

Remarque : La première section de sommets construite étant définie sur un domaine complet A quelconque de \mathcal{R} , on peut choisir $A = X$ (c'est-à-dire une section borélienne s définie sur tout X) et ainsi supposer que l'espace borélien standard portée par la racine s'identifie (via s) à X , ce que nous ferons par la suite.

Nous allons introduire une dernière notion, celle de *désingularisation d'une action*. Étant donné une action d'une relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} sur un arboretum \mathcal{A} sur X , nous avons vu (prop. 32) l'existence d'un arboretum de représentants G^r de cette action mais cette notion n'« encode » pas toute l'information de l'action de \mathcal{R} sur \mathcal{A} dans le cas général puisque les $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$ -saturés des représentations des espaces boréliens standards portés par les arêtes de G^r ne recouvrent pas *a priori* l'espace des arêtes \mathcal{A}^1 .

Définition 33 (Désingularisation d'une action). *Une désingularisation de l'action de \mathcal{R} sur \mathcal{A} est la donnée d'un graphe orienté de relations G^r (c'est-à-dire de graphe sous-jacent G orienté), d'un sous-arbre maximal enraciné A_m de G et d'un isomorphisme partiel ϕ_a de $[[\mathcal{R}]]$ pour chaque arête a de l'orientation de G n'appartenant pas à A_m tel que :*

- *l'arbre de relations enraciné A_m^r induit par G^r sur A_m soit un arboretum de représentants de l'action de \mathcal{R} sur \mathcal{A} tel que l'espace borélien standard porté par la racine de A_m s'identifie à X (notons χ l'isomorphisme de représentation) ;*
- *pour toute arête a de l'orientation de G n'appartenant pas à A_m , il existe une section partielle d'arêtes s_a définie sur la source de ϕ_a , dont les sommets origines appartiennent à la représentation dans \mathcal{A} de l'espace borélien standard porté par le sommet origine de a et telle que les images par ϕ_a des sommets terminaux appartiennent à la représentation dans \mathcal{A} de l'espace borélien standard porté le sommet terminal de a . Comme pour les sommets, nous dirons que l'image de cette section partielle est une représentation de l'espace borélien standard porté par l'arête ;*
- *pour toute arête a de l'orientation de G n'appartenant pas à A_m , χ induit un isomorphisme entre $\text{Stab}_{\mathcal{R}}(s_a)$ identifié à une sous-relation de $\mathcal{R}_{\chi(o(a))}$ et l'image par le morphisme injectif associé à \bar{a} de la relation d'équivalence borélienne portée par \bar{a} dans la relation d'équivalence borélienne portée par $t(\bar{a})$, ainsi qu'un isomorphisme entre $\phi_a \text{Stab}_{\mathcal{R}}(s_a) \phi_a^{-1}$ identifié à une sous-relation de $\mathcal{R}_{\chi(t(a))}$ et l'image par le morphisme injectif associé à a de la relation d'équivalence borélienne portée par a dans la relation d'équivalence borélienne portée par $t(a)$;*
- *les $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^1}$ -saturés des représentations des espaces boréliens standards portés par les arêtes de G^r forment une partition de l'espace des arêtes \mathcal{A}^1 .*

Démontrons à présent l'existence d'une désingularisation pour toute action d'une relation d'équivalence borélienne sur un arboretum. Ce résultat d'existence est analogue à la construction d'un graphe de groupes associé à une action d'un groupe sur un arbre.

Théorème 34. *Soit \mathcal{A} un \mathcal{R} -arboretum sur X . Alors il existe une désingularisation de l'action de \mathcal{R} sur \mathcal{A} .*

Remarque 1 : Comme nous allons le voir dans la construction ci-dessous, pour toute arête a de l'orientation de G n'appartenant pas à A_m , le graphe de l'isomorphisme partiel ϕ_a ne rencontre pas la diagonale de $X \times X$.

Remarque 2 : Tout comme dans le cas d'une action d'un groupe sur un arbre, il n'y a pas de désingularisation canonique et nous sommes amenés à faire de nombreux choix lors de notre construction. D'ailleurs il n'y a déjà pas de choix canonique d'un graphe sous-jacent à une désingularisation, contrairement au cas classique où le graphe sous-jacent est l'espace quotient de l'action sans inversion du groupe sur l'arbre.

Démonstration : La proposition 32 assure l'existence d'un arboretum de représentants, c'est-à-dire un arbre de relations enraciné A_m^r et d'un isomorphisme de représentation χ de A_m^r dans \mathcal{A} , tel que l'espace borélien standard porté par la racine de A_m s'identifie à X . Ainsi les orbites sous l'action de \mathcal{R} des représentations des espaces boréliens standards portés par les sommets de A_m^r forment une partition \mathcal{R} -invariante de l'espace des sommets \mathcal{A}^0 . Désignons par C le complémentaire dans \mathcal{A}^1 des \mathcal{R} -orbites des représentations des espaces boréliens standards portés par les arêtes de A_m^r . Si C est vide, alors A_m^r est déjà une désingularisation de l'action de \mathcal{R} sur \mathcal{A} . Sinon, la partie borélienne C' de C constituée des arêtes dont le sommet origine appartient à l'arboretum de représentants est non vide car les fibres de \mathcal{A} sont des graphes connexes et que \mathcal{R} agit en préservant les distances sur \mathcal{A}^0 . Nous allons construire une famille de sections partielles de C dont les saturés des images forment une partition borélienne de C .

Soit P un sommet de A_m^r et s la section partielle de sommets de \mathcal{A} représentant l'espace borélien standard porté par P . Pour tout sommet Q de A_m^r , considérons la partie borélienne $C_{(P,Q)}$ de C constituée des arêtes dont le sommet origine appartient à l'image de s et dont le sommet terminal appartient au saturé de la représentation de l'espace borélien standard porté par Q . Si $C_{(P,Q)}$ est non vide, c'est un espace fibré standard sur $\pi(C_{(P,Q)})$ que nous pouvons exhauster d'après la remarque suivant le lemme 10 à l'aide de sections partielles dont les saturés des images forment une partition borélienne de $C_{(P,Q)}$. Chacune de ces sections partielles d'arêtes donne lieu à une arête dans A_m^r entre les sommets P et Q . La relation d'équivalence borélienne \mathcal{R}_a induite par $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^1}$ sur l'image de l'une de ces sections partielles a de \mathcal{A}^1 s'identifie naturellement à une sous-relation de la représentation de la relation d'équivalence borélienne portée par P et, quitte à considérer une restriction de a à un domaine complet de son stabilisateur, \mathcal{R}_a s'injecte comme sous-relation de la relation d'équivalence borélienne portée par Q via un isomorphisme partiel de $[[\mathcal{R}]]$ qui envoie la section de sommets terminaux $t(a)$ dans la représentation de l'arboretum de représentants.

□

Étant donné une désingularisation (G^r, A_m, χ) de l'action d'une relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} sur un arboretum \mathcal{A} sur X , nous allons désormais démontrer quelques propriétés de cette désingularisation. Rappelons que la représentation de l'arboretum de représentants de l'action de \mathcal{R} sur \mathcal{A} est un sous-arboretum de \mathcal{A} sur X et que l'isomorphisme partiel porté par une arête de A_m^{ip} dont le sommet origine est celui de ses deux sommets le plus proche de la racine est surjectif. Enfin, rappelons que les relations d'équivalence boréliennes portées par les sommets de G^r s'identifient via χ à des sous-relations de \mathcal{R} et qu'à chaque arête a de l'orientation de G n'appartenant pas à A_m correspond un isomorphisme partiel ϕ_a de $[[\mathcal{R}]]$. On définit $\phi_{\bar{a}} = \phi_a^{-1}$ pour toute arête a de l'orientation de $G \setminus A_m$ et, pour toute arête a de A_m , ϕ_a comme la restriction de l'identité de X sur la projection dans X de la représentation de l'espace borélien standard porté par le sommet origine de a .

Soit P et Q deux sommets adjacents dans l'arbre maximal A_m et supposons que P soit le plus proche des deux du sommet racine. Identifiées via χ à des sous-relations de \mathcal{R} sur les parties boréliennes $X_P \supset X_Q$ de X , notons \mathcal{R}_P et \mathcal{R}_Q les relations d'équivalence boréliennes portées par les sommets P et Q . De même, identifiée à une sous-relation de \mathcal{R} définie sur X_Q , désignons par $\mathcal{R}_{P,Q}$ la relation d'équivalence borélienne portée par l'arête de A_m joignant P à Q .

Lemme 35. *La relation d'équivalence borélienne engendrée par $\mathcal{R}_P|_{X_Q}$ et \mathcal{R}_Q sur X_Q est le produit amalgamé de $\mathcal{R}_P|_{X_Q}$ et \mathcal{R}_Q suivant la sous-relation $\mathcal{R}_{P,Q}$.*

Démonstration : Considérons dans \mathcal{A} les représentations des espaces boréliens standards portés par les sommets P et Q , ainsi que la représentation de l'espace borélien standard porté par l'arête de A_m^r joignant P à Q ; cette dernière définit sur $X_Q \subset X$ une section partielle d'arêtes s . Notons \mathcal{S} la relation d'équivalence borélienne engendrée par $\mathcal{R}_P|_{X_Q}$ et \mathcal{R}_Q sur X_Q et considérons l'orbite de l'image de s sous l'action de \mathcal{S} . Par définition de \mathcal{S} , on obtient pour tout élément x de X_Q un sous-arbre \mathcal{A}'_x de \mathcal{A}_x . Ainsi, \mathcal{S} est une relation d'équivalence borélienne qui agit sur l'arboretum \mathcal{A}' sur X_Q , lequel possède une section borélienne d'arêtes dont l'image est un domaine complet de $\mathcal{S}_{\mathcal{A}'}$ et tel que les saturés des sections boréliennes de sommets origines $o(s)$ et terminaux $t(s)$ forment une partition bi-colorée de l'espace des sommets \mathcal{A}'^0 . Le résultat découle alors du théorème 25. \square

Le lemme précédent s'étend sans difficulté au cas de deux sommets quelconques distincts. Pour ceci, considérons la géodésique dans A_m^r joignant les deux sommets P et Q et supposons que l'intersection $X_{P,Q} \subset X$ des espaces boréliens standards portés par ces sommets ne soit pas vide. Désignons par $\mathcal{R}_{P,Q}$ l'intersection de toutes les relations d'équivalence boréliennes portées par les arêtes de la géodésique joignant P et Q .

Proposition 36. *La relation d'équivalence borélienne \mathcal{S} engendrée par $\mathcal{R}_P|_{X_{P,Q}}$ et $\mathcal{R}_Q|_{X_{P,Q}}$ sur $X_{P,Q}$ est le produit amalgamé de $\mathcal{R}_P|_{X_{P,Q}}$ et $\mathcal{R}_Q|_{X_{P,Q}}$ suivant la sous-relation $\mathcal{R}_{P,Q}$.*

Démonstration : Nous allons procéder comme dans la démonstration du lemme précédent : considérons les représentations dans \mathcal{A} des espaces boréliens standards portés par les sommets et les arêtes de la géodésique joignant P à Q dans A_m . Partant du sous-arboretum \mathcal{A}'' de la restriction de \mathcal{A} à $X_{P,Q}$, considérons l'image de \mathcal{A}'' sous l'action de la relation d'équivalence borélienne \mathcal{S} . On obtient ainsi un \mathcal{S} -arboretum \mathcal{A}' sur $X_{P,Q}$. La contraction de \mathcal{A}' suivant \mathcal{A}'' dans chaque fibre de $X_{P,Q}$ est une opération borélienne qui se prolonge par \mathcal{S} -équivariance : on obtient alors un nouvel \mathcal{S} -arboretum sur $X_{P,Q}$ satisfaisant les conditions du théorème 25 et dont le stabilisateur de la section d'arêtes ainsi construite n'est autre que l'intersection de toutes les relations d'équivalence boréliennes portées par les arêtes de la géodésique joignant P à Q . \square

Identifiées via χ à des sous-relations de \mathcal{R} , les relations d'équivalence boréliennes portées par les sommets de G engendrent une sous-relation \mathcal{R}' de \mathcal{R} définie sur X . Notons \mathcal{R}'' la sous-relation de \mathcal{R} (*a priori* définie sur une partie borélienne de X) engendrée par les isomorphismes partiels ϕ_a portés par chacune des arêtes a de G . Nous allons désormais voir que \mathcal{R} est engendrée par \mathcal{R}' et \mathcal{R}'' .

Lemme 37. *Soit x et y deux éléments \mathcal{R} -équivalents de X .*

1. $(y, x) \cdot \mathcal{A}'_x \cap \mathcal{A}'_y \neq \emptyset$ si et seulement si x et y sont \mathcal{R}_P -équivalents pour la relation d'équivalence borélienne \mathcal{R}_P portée par un sommet P de G ;
2. le \mathcal{R}' -saturé de \mathcal{A}' est un \mathcal{R}' -arboretum ;

3. $(y, x) \cdot [\mathcal{R}' \cdot \mathcal{A}'_x] \cap [\mathcal{R}' \cdot \mathcal{A}'_y] \neq \emptyset$ si et seulement si x et y sont \mathcal{R}' -équivalents. Dans ce cas on a en fait $(y, x) \cdot [\mathcal{R}' \cdot \mathcal{A}'_x] = [\mathcal{R}' \cdot \mathcal{A}'_y]$.

Démonstration : Le point 1 est clair par définition et le point 2 est une conséquence directe de la connexité dans chaque fibre déduite du point 1. On en déduit alors directement le point 3. \square

Proposition 38. 1. Toute relation d'équivalence borélienne R_P portée par un sommet P de G est d'intersection triviale avec \mathcal{R}'' ;

2. \mathcal{R}'' est arborable.

Démonstration : Le point 1 est une conséquence du fait que les fibres de \mathcal{A} sont des arbres et donc ne contiennent pas de circuit de longueur 1. On déduit du point 1 et du point 1 du lemme 37 que les images par des couples d'éléments \mathcal{R}'' -équivalents de \mathcal{A}' dans une fibre donnée sont disjointes. Considérons dans chaque fibre l'enveloppe convexe de tous ces translatés, autrement dit, l'enveloppe convexe du \mathcal{R}'' -saturé de \mathcal{A}' . La contraction par \mathcal{R}'' -équivalence suivant \mathcal{A}' donne un nouvel arboretum sur lequel \mathcal{R}'' agit : le stabilisateur de la section diagonale après contraction est trivial. En effet, si x et y appartiennent au stabilisateur de la section diagonale, alors $(y, x) \cdot \mathcal{A}'_x$ est égal à \mathcal{A}'_y et on a déjà vu que ceci implique $x = y$. On obtient finalement un \mathcal{R}'' -arboretum dont une section borélienne de sommets définie sur X est un domaine fondamental pour l'action sur l'espace des sommets : il s'agit donc d'une action lisse, ce qui prouve l'arborabilité de \mathcal{R}'' . \square

Lemme 39. Soit \mathcal{S} une relation d'équivalence borélienne agissant sur un arboretum \mathcal{B} sur un espace borélien standard Y . Supposons qu'il existe une section borélienne d de sommets saturante de stabilisateur \mathcal{S}' . Si $(s_a)_{a \in \underline{A}}$ est une famille dénombrable de sections partielles d'arêtes, dites extra-arêtes, telle que :

1. les sommets origines de ces extra-arêtes appartiennent à $d(Y)$;
2. pour chacune de ces sections d'arêtes s_a définie sur A_a , il existe un isomorphisme partiel $\phi : A_a \longrightarrow B_a$ de \mathcal{S} tel que l'image des sommets terminaux de $s_a(A_a)$ par ϕ soit exactement $d(B_a)$;
3. la réunion de ces extra-arêtes soit un domaine complet de la relation d'équivalence borélienne sur l'espace des arêtes,

alors \mathcal{S} est engendrée par \mathcal{S}' et \mathcal{S}'' , où \mathcal{S}'' désigne la relation d'équivalence borélienne engendrée par le L -graphage $(\phi_a)_{a \in \underline{A}}$.

Démonstration : Soit x et y deux éléments \mathcal{S} -équivalents de Y . Intéressons-nous à la géodésique (de longueur k) joignant $d(x)$ à l'image par (x, y) de $d(y)$, et notons a_1 la première arête de cette géodésique de sommet origine $d(x)$. Si a_1 est une extra-arête, alors il existe un élément x_1 de Y qui soit \mathcal{S}'' -équivalent à x et tel que l'orbite du sommet terminal de a_1 contienne $d(x_1)$. Puisque \mathcal{S} agit sur \mathcal{B} en préservant les distances, la longueur de la géodésique joignant $d(x_1)$ à l'image par (x_1, y) de $d(y)$ est de longueur $k - 1$. Sinon, quitte à considérer un élément \mathcal{S}' -équivalent à x , on peut supposer que a_1 est l'image d'une extra-arête par un des isomorphismes partiels ϕ_a . Dans ce cas, il existe x_1 tel que l'image de $d(x_1)$ par ϕ_a soit exactement $d(x)$: là encore, la longueur de la géodésique joignant $d(x_1)$ à l'image par (x_1, y) de $d(y)$ est alors de longueur $k - 1$. Soit n un entier ≥ 1 . Étant donné $0 \leq k \leq n - 1$ et une

suite d'éléments \mathcal{S} -équivalents (x_1, x_2, \dots, x_k) à x , l'argument précédent permet de conclure que si la longueur de la géodésique joignant $d(x_{n-k})$ à l'image par (x_{n-k}, y) de $d(y)$ est de longueur $n - k$, alors, quitte à considérer d'abord un élément \mathcal{S}' -équivalent, il existe un élément \mathcal{S}'' -équivalent x_{n-k-1} à x_{n-k} tel que la longueur de la géodésique $d(x_{n-k-1})$ à l'image par (x_{n-k-1}, y) de $d(y)$ soit de longueur $n - k - 1$. D'où le résultat. \square

Proposition 40. *La relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} est engendrée par \mathcal{R}' et \mathcal{R}'' .*

Démonstration : Considérons la contraction de \mathcal{A} suivant le \mathcal{R}' -saturé de \mathcal{A}' . D'après le point 2 du lemme 37, on obtient un \mathcal{R} -arboretum satisfaisant aux hypothèses du lemme précédent, le stabilisateur de la section borélienne de sommets d étant précisément \mathcal{R}' d'après le point 3 du même lemme. \square

2 Sous-relations d'un produit libre

Nous allons utiliser les résultats précédents pour étudier les sous-relations d'une relation d'équivalence borélienne qui admet une décomposition en produit libre d'un ensemble dénombrable de sous-relations. En théorie des groupes, le théorème de Kurosh ([Kur56]) assure qu'un sous-groupe H du produit libre G d'une famille de groupes $(G_z)_{z \in \mathbb{Z}}$ est isomorphe au produit libre de son intersection avec des conjugués des G_z convenablement indexés et d'un sous-groupe libre de G . Nous obtenons un théorème de décomposition (th. 42) dans le contexte des relations d'équivalence boréliennes pour les sous-relations d'un produit libre $\mathcal{R} = \star_{i \in I} \mathcal{R}_i$ d'un ensemble dénombrable de sous-relations \mathcal{R}_i , ainsi que la structure d'une restriction de \mathcal{R} à toute partie borélienne Y de X (th. 44).

Définition 41 (Produit amalgamé dénombrable). *La relation d'équivalence borélienne \mathcal{R} sur X admet une décomposition en produit amalgamé dénombrable des sous-relations \mathcal{R}_i ($i \in I$) suivant la sous-relation commune \mathcal{R}' si \mathcal{R} est engendrée par la famille dénombrable des \mathcal{R}_i et si, pour tout n -uplet (x_1, x_2, \dots, x_n) d'éléments de X tels que $x_n = x_1$ et $(x_k, x_{k+1}) \in \mathcal{R}_{i_k}$, il existe $1 \leq k \leq n - 1$ tel que $(x_k, x_{k+1}) \in \mathcal{R}'$. Dans ce cas, on note*

$$\mathcal{R} = \star_{\mathcal{R}'} \mathcal{R}_i.$$

En particulier, si \mathcal{R}' est triviale dans la définition précédente, on obtient la notion de produit libre dénombrable de sous-relations.

Théorème 42. *Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence borélienne sur X , produit libre dénombrable de sous-relations \mathcal{R}_i ($i \in I$). Alors*

$$\mathcal{S} = \star_{i \in I} (\star_{k_i \in K(i)} \mathcal{S}_{k_i}) \star \mathcal{T},$$

où, pour tout k_i d'un ensemble dénombrable $K(i)$, il existe un élément ϕ_{k_i} de $[[\mathcal{R}]]$ défini sur une partie borélienne A_{k_i} de X tel que

$$\mathcal{S}_{k_i} = \left(\phi_{k_i}^{-1} \mathcal{R}_i|_{\phi_{k_i}(A_{k_i})} \phi_{k_i} \right) \cap \mathcal{S},$$

et où \mathcal{T} est une sous-relation arborable de \mathcal{S} . De plus, pour tout i de I , il existe k_i dans $K(i)$ tels que

$$A_{k_i} = X \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{k_i} = \mathcal{R}_i \cap \mathcal{S}.$$

Remarque : Le résultat précédent s'étend sans difficulté supplémentaire au cas d'un produit amalgamé dénombrable de sous-relations \mathcal{R}_i suivant une sous-relation commune \mathcal{R}' sous l'hypothèse que l'intersection de \mathcal{S} avec toute conjuguée de \mathcal{R}' soit lisse.

Démonstration : Commençons par déduire le cas général du cas particulier d'un produit libre de deux sous-relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 . Donnons-nous un ordre sur I (indexé par les entiers naturels non nuls, éventuellement un nombre fini si I est fini) et commençons par isoler le premier facteur dans la décomposition de \mathcal{R} : on écrit ainsi $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \star_{\mathcal{R}'} \mathcal{R}'_2$, où \mathcal{R}'_2 est le produit amalgamé des \mathcal{R}_i restantes suivant \mathcal{R}' . On en déduit que \mathcal{S} est le produit libre de son intersection avec des \mathcal{R} -conjuguées de restrictions de \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}'_2 et d'une sous-relation arborable. On est ainsi amené à s'intéresser à certaines sous-relations de $\mathcal{R}'_2 = \mathcal{R}_2 \star_{\mathcal{R}'} \mathcal{R}'_3$ (dont $\mathcal{S} \cap \mathcal{R}'_2$), où \mathcal{R}_2 est le deuxième facteur dans la décomposition initiale de \mathcal{R} et \mathcal{R}'_3 le produit amalgamé des \mathcal{R}_i restantes suivant \mathcal{R}' . On applique à nouveau le théorème dans le cas de deux facteurs à cette sous-relation, ce qui donne une décomposition faisant intervenir une sous-relation arborable et des sous-relations de \mathcal{R} -conjuguées de restrictions de \mathcal{R}_2 et \mathcal{R}'_3 . On continue ainsi la décomposition des sous-relations de \mathcal{R} -conjuguées de restrictions des \mathcal{R}'_i apparaissant et, en utilisant un argument diagonal et le fait que le produit libre de sous-relations arborables est encore arborable (cf. prop. 20, le cas d'une infinité dénombrable de facteurs étant analogue), on en déduit l'existence de \mathcal{S}_{k_i} et de \mathcal{T} comme souhaitées telles que $\star_{i \in I} (\star_{k_i \in K(i)} \mathcal{S}_{k_i}) \star \mathcal{T}$ soit une sous-relation de \mathcal{S} . Enfin si deux éléments x et y de X sont \mathcal{S} -équivalents, il existe un nombre fini de \mathcal{R}_i tel que (x, y) appartienne au produit libre dénombrable de ces \mathcal{R}_i , et donc (x, y) appartient à $\star_{i \in I} (\star_{k_i \in K(i)} \mathcal{S}_{k_i}) \star \mathcal{T}$.

Nous allons maintenant démontrer le cas particulier d'un produit libre de deux sous-relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 . Pour cela, considérons le \mathcal{R} -arborescences canonique \mathcal{A} associé à la décomposition en produit libre de $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \star \mathcal{R}_2$ (cf. p. 14). Précisons une désingularisation de l'action de \mathcal{S} (déduite de celle de \mathcal{R}) sur \mathcal{A} en suivant la construction développée dans la démonstration de la proposition 32 et en utilisant la partition naturelle de l'espace des sommets de \mathcal{A} en deux parties. Autrement dit, à chaque étape de la construction d'un arborescences de représentants (dont on note \mathcal{A}' sa représentation dans \mathcal{A}), les sections partielles de sommets que l'on considère sont des sections partielles de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ ou de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_2$ et la première section borélienne d'arêtes que l'on choisit est la diagonale de l'espace fibré standard canonique des arêtes orientées. Or nous avons déjà vu (cf. rem. 2 de la prop. 5) que le stabilisateur d'une section partielle de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_i$ est stablement conjugué à la restriction de \mathcal{R}_i à une partie borélienne de X . Quitte à restreindre son domaine de définition, on peut donc supposer à chaque étape que le stabilisateur de la section partielle de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_i$ construite soit conjugué à une restriction de \mathcal{R}_i et que le stabilisateur de la section partielle d'arêtes ainsi défini soit trivial : ceci est possible car l'action de \mathcal{R} est lisse sur l'espace des arêtes. Enfin, puisque la première section borélienne d'arêtes considérée est la diagonale de \mathcal{R} , on en déduit que les deux premières sections de sommets sont les diagonales $d_{\mathcal{R}_1}$ et $d_{\mathcal{R}_2}$ de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}/\mathcal{R}_2$. Notons que ce qui précède s'étend sans difficulté supplémentaire au cas où \mathcal{R} est le produit amalgamé de \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 suivant la sous-relation commune \mathcal{R}_3 sous l'hypothèse que l'intersection de \mathcal{S} avec toute conjuguée de \mathcal{R}_3 soit lisse. En effet cette dernière hypothèse assure que \mathcal{S} agisse quasi-librement sur le \mathcal{R} -espace fibré standard $\mathcal{R}/\mathcal{R}_3$.

Contractons \mathcal{A}' par \mathcal{R} -équivalence : on se ramène ainsi au cadre du lemme 39 sous l'hypothèse 3') plus forte qui assure que la réunion des extra-arêtes soit un domaine fondamental de la relation d'équivalence borélienne sur l'espace des arêtes,

ce qui est une conséquence du fait que l'action de \mathcal{R} soit libre. Utilisant les notations du lemme 39 et compte tenu des propositions 36, 38 et 40, il ne reste plus qu'à voir que \mathcal{S}' et \mathcal{S}'' sont des sous-relations en produit libre de \mathcal{S} .

Commençons par remarquer que \mathcal{S}' et \mathcal{S}'' sont d'intersection triviale. En effet, si deux éléments x et y sont \mathcal{S}' -équivalents, alors le sommet $d(x)$ a pour image le sommet $d(y)$ sous l'action de (y, x) ; or si x et y sont \mathcal{S}'' -équivalents, par définition, un des sommets à distance 1 de $d(x)$ est envoyé sur $d(y)$. Si $x \neq y$ était $(\mathcal{S}' \cap \mathcal{S}'')$ -équivalents, on en déduirait alors un cycle de longueur 1 attaché en $d(y)$.

Remarque : Rappelons à présent que si on opère par un couple d'éléments $(t, \phi_a(t))$ où t appartient à la source A_a de ϕ_a , cela signifie qu'au-dessus de t , il existe une arête du domaine fondamental dont le sommet origine est $d(t)$ et que le sommet terminal de cette arête est envoyé par $(\phi_a(t), t)$ sur $d(\phi(t))$.

Soit v un sommet dans la fibre de x . Notons a_1 la première arête (de sommet origine $d(x)$) de la géodésique reliant $d(x)$ à v . Analysons les différentes situations possibles :

1. si on opère par un couple d'éléments (x, y) de \mathcal{S}' , alors la distance de v à $d(x)$ dans la fibre de x est préservée par l'action de (y, x) ;
2. si on opère par un couple d'éléments $(x, \phi_a(x))$ pour un certain ϕ_a :
 - si a_1 est l'extra-arête qui définit ϕ_a (et donc appartient au domaine fondamental), alors la distance augmente de -1 ;
 - si a_1 n'est pas l'extra-arête qui définit ϕ_a , alors la distance augmente de $+1$;
3. si on opère par un couple d'éléments $(x = \phi_a(u), u)$ pour un certain ϕ_a :
 - si l'arête opposée de a_1 est l'image de l'extra-arête qui définit ϕ_a , alors la distance augmente de -1 ;
 - si l'arête opposée de a_1 n'est pas l'image de l'extra-arête qui définit ϕ_a , alors la distance augmente de $+1$.

Supposons un mouvement de la forme : $+1$ suivi de -1 . L'élément $(\phi_a(x), x) \cdot d(x)$ est un élément à distance $+1$ de $d(\phi_a(x))$. Considérons un mouvement de la forme -1 avec un certain ψ_b ; d'après ce qui précède, il s'agit des situations 2-point 1 et 3-point 1. La situation 2-point 1 est impossible car a_1 , qui est l'arête joignant $d(\phi(x))$ à $(\phi(x), x) \cdot d(x)$ est par définition telle que son opposée est l'image d'une arête du domaine fondamental : en particulier, ce n'est pas une extra-arête pouvant définir ψ_b . Donc 3-point 1 est la seule possibilité et l'unicité due au domaine fondamental assure alors ψ_b soit l'inverse de ϕ_a . Ainsi tout mouvement de la forme $+1$ suivi de -1 est trivial, c'est-à-dire de la forme : $x \longrightarrow \phi_a(x) \longrightarrow x$ (conclusion 1).

Supposons un mouvement de la forme : $+1$ suivi de 0 suivi de -1 . Les mêmes arguments que ci-dessus prouvent que cela est impossible, si le 0 correspond à deux points distincts dans \mathcal{S}' (conclusion 2).

Donnons-nous une suite de points (x_1, x_2, \dots, x_n) avec $x_n = x_1$, successivement \mathcal{S}' ou \mathcal{S}'' -équivalents et étudions la distance à la section d des images successives du sommet $d(x_0)$ sous l'action de ces couples d'éléments. Appliquons les transformations successives de x_1 à $x_n = x_1$, que l'on suppose être une suite réduite. La fonction distance est une fonction à valeurs dans \mathbb{Z} qui à chaque étape avance de 0 , d'un entier positif ou d'un entier négatif, qui part de 0 et qui revient en 0 (les fibres de \mathcal{B} sont des arbres). Ce qui précède (cf. conclusion 1) assure qu'on se ramène alors à un mouvement de la forme

$$0 \longrightarrow (+1 + 1 + 1 + 1) \longrightarrow 0 \longrightarrow (+1 + 1 + 1) \longrightarrow 0 \longrightarrow (-1 - 1) \longrightarrow 0 \longrightarrow \text{etc.}$$

l'uplet étant toujours réduit si on regroupe chaque parenthèse. Mais nous avons vu (cf. conclusion 2) que la distance ne fait que croître ou décroître strictement selon le signe de la première valeur, ce qui est absurde car $x_n = x_1$. \square

Donnons à présent une deuxième application des résultats précédents concernant la restriction de $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \star \mathcal{R}_2$ à une partie borélienne A de X qui est un domaine complet de \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 . On retrouve alors les résultats de Ioana-Peterson-Popa ([IPP05], prop. 7.4.2) obtenus dans le cadre mesuré.

Proposition 43. *Soit $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \star \mathcal{R}_2$ une relation d'équivalence borélienne sur X , produit libre des sous-relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 . Si A désigne un domaine complet commun de \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 , alors*

$$\mathcal{R}|_A = \mathcal{R}_1|_A \star \mathcal{R}_2|_A \star \mathcal{T}$$

où \mathcal{T} est une sous-relation arborable de \mathcal{R} .

Démonstration : Continuons de désigner par \mathcal{A} le \mathcal{R} -arboretum canonique associé à la décomposition de \mathcal{R} . Considérons l'action de $\mathcal{R}|_A$ sur la restriction de \mathcal{A} à A . Par hypothèse, l'image de A par $d_{\mathcal{R}_i}$ est un domaine complet de $\mathcal{R}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_i}$ et, par conséquent, la réunion de $d_{\mathcal{R}_1}(A)$ et de $d_{\mathcal{R}_2}(A)$ est un domaine complet de la restriction de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}_0}$ à l'espace des sommets de $\mathcal{A}|_A$. La construction développée dans la démonstration de la proposition 32 donne une désingularisation de l'action de $\mathcal{R}|_A$ sur $\mathcal{A}|_A$ telle que le graphe de relations associé ait exactement deux sommets portant les relations d'équivalence boréliennes $\mathcal{R}_1|_A$ et $\mathcal{R}_2|_A$ et tel que les relations d'équivalence boréliennes associées aux arêtes soient triviales. Les mêmes arguments que dans la démonstration du théorème 42 permettent de conclure. \square

Formulons le cas général (sans hypothèse sur A) pour un produit libre dénombrable de sous-relations. Puisque $\mathcal{R}|_A$ est une sous-relation de \mathcal{R} , on peut en particulier appliquer le théorème précédent. Mais nous pouvons être plus précis encore.

Théorème 44. *Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence borélienne sur X , produit libre dénombrable de sous-relations \mathcal{R}_i ($i \in I$) définies sur des parties boréliennes A_i de X telles que la réunion des A_i soit égale à X . Pour toute partie borélienne A de X , la restriction $\mathcal{R}|_A$ de \mathcal{R} à A admet une décomposition en produit libre dénombrable de sous-relations de la forme*

$$\mathcal{R}|_A = \star_{i \in I} (\star_{k_i \in K(i)} \mathcal{S}_{k_i}) \star \mathcal{T},$$

où, pour tout k_i de l'ensemble dénombrable $K(i)$, il existe un élément ϕ_{k_i} de $[[\mathcal{R}]]$ défini sur une partie borélienne A_{k_i} de X tel que

$$\mathcal{S}_{k_i} = \phi_{k_i}^{-1} \mathcal{R}_i|_{\phi_{k_i}(A_{k_i})} \phi_{k_i},$$

et où \mathcal{T} désigne une sous-relation arborable de \mathcal{R} . De plus, pour tout i de I , la réunion des \mathcal{R}_i -saturés des buts $\phi_{k_i}(A_{k_i})$ des ϕ_{k_i} forme une partition (dénombrable et borélienne) du domaine de définition A_i de \mathcal{R}_i . Enfin, pour tout i de I tel que $A_i \cap A$ soit non vide, il existe k_i dans $K(i)$ tels que

$$A_{k_i} = A_i \cap A \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_{k_i} = \mathcal{R}_i|_{A_i \cap A}.$$

Démonstration : Le cas général se déduit du cas de deux facteurs comme dans la démonstration du théorème 42. Désignant toujours par \mathcal{A} le \mathcal{R} -arboretum canonique associé à la décomposition de $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \star \mathcal{R}_2$, considérons le $\mathcal{R}|_{\mathcal{A}}$ -arboretum $\mathcal{A}|_{\mathcal{A}}$ et désingularisons l'action de $\mathcal{R}|_{\mathcal{A}}$ exactement comme dans la démonstration du théorème 42 en utilisant la partition naturelle de l'espace des sommets de \mathcal{A} en deux parties ; la première section borélienne d'arêtes que l'on choisit est bien entendu la restriction à \mathcal{A} de la diagonale de l'espace fibré standard canonique des arêtes orientées, de sorte que les deux premières sections de sommets soient les restrictions $d_{\mathcal{R}_1}|_{\mathcal{A}}$ et $d_{\mathcal{R}_2}|_{\mathcal{A}}$ à \mathcal{A} des diagonales $d_{\mathcal{R}_1}$ et $d_{\mathcal{R}_2}$ de $\mathcal{R}/\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}/\mathcal{R}_2$.

Le seul point qu'il reste à voir est que, pour tout i de I , la réunion des \mathcal{R}_i -saturés des $\phi_{k_i}(A_{k_i})$ forme une partition de A_i . Pour cela, rappelons que la réunion des images $d_{\mathcal{R}_1}(X)$ et $d_{\mathcal{R}_2}(X)$ des diagonales $d_{\mathcal{R}_1}$ et $d_{\mathcal{R}_2}$ est un domaine complet de $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$. Par suite, quitte à considérer sa restriction à un domaine complet de son \mathcal{R} -stabilisateur, pour toute section partielle s de sommets monochromes (de couleur $l = 1, 2$) de $\mathcal{A}|_{\mathcal{A}}$ définie sur une partie borélienne A_s de \mathcal{A} , il existe un isomorphisme partiel $\phi_s : A_s \rightarrow B_s$ de $[[\mathcal{R}]]$ tel que l'image sous l'action de ϕ_s de $s(A_s)$ soit exactement $d_{\mathcal{R}_l}(B_s)$. Si s et s' désignent deux telles sections de sommets de même couleur l dans la construction d'une désingularisation de l'action de $\mathcal{R}|_{\mathcal{A}}$ (cf. dém. prop. 32), on en déduit que les $\mathcal{R}_{\mathcal{A}^0}$ -saturés de $d_{\mathcal{R}_l}(B_s)$ et $d_{\mathcal{R}_l}(B_{s'})$ sont disjoints, et par suite, que les \mathcal{R}_l -saturés de B_s et $B_{s'}$ sont disjoints car \mathcal{R}_l est précisément le \mathcal{R} -stabilisateur de $d_{\mathcal{R}_l}$. □

Références

- [Alv08] A. Alvarez. *Une théorie de Bass-Serre pour les relations d'équivalence et les groupoïdes boréliens*. Prépublication, 2008.
- [AG] A. ALVAREZ et D. GABORIAU – « Free products, Orbit Equivalence and Measure Equivalence Rigidity », prépublication <http://arxiv.org/find/all/1/all:+AND+gaboriau+alvarez/0/1/0/all/0/1>.
- [Gab98] D. GABORIAU – « Mercuriale de groupes et de relations », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **326** (1998), 219–222.
- [Gab00] —, « Coût des relations d'équivalence et des groupes », *Invent. Math.* **139** (2000), 41–98.
- [Gab02] —, « Invariants l^2 de relations d'équivalence et de groupes », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **95** (2002), 93–150.
- [IPP05] A. IOANA, J. PETERSON et S. POPA – « Amalgamated free products of w -rigid groups and calculation of their symmetry groups », *Acta Mathematica* (2005), to appear.
- [JKL02] S. JACKSON, A. S. KECHRIS et A. LOUVEAU – « Countable Borel equivalence relations », *J. Math. Log.* **2** (2002), 1–80.
- [Kec95] —, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics **156**, Springer-Verlag, New York (1995).
- [KM04] A. S. KECHRIS et B. D. MILLER – *Topics in orbit equivalence*, Lecture Notes in Math. **1852**, Springer-Verlag, Berlin (2004).
- [Kur66] K. KURATOWSKI – *Topology. Vol. I*, Academic Press, New York (1966).

- [Kur56] A. G. KUROSH , *The theory of groups. Vol. I*, Chelsea Publishing Company, New York (1956).
- [Lev95] G. LEVITT – « On the cost of generating an equivalence relation », *Erg. Th. Dyn. Syst.* **15** (1995), 1173–1181.
- [Ser77] J.-P. SERRE – *Arbres, amalgames, SL_2* , Astérisque **46**, Soc. Math. de France, Paris (1977).